Prof. G. VERONESE

NOZIONI ELEMENTA[RI]

DI

Geometria Intuitiva

AD USO

DEI GINNASI INFERIORI

4.a EDIZIONE

PADOVA - FRATELLI DRUCKER - PADOVA
Librai Editori
1912

PADOVA - ARTI GRAFICHE P. PROSPERINI - SOC. AN.

INDICE

CAP. I.

Nozioni Preliminari . . . . Pag. 1
La retta . . . . » 6
Rette parallele 13
Il piano . . . . » 16
Delle figure eguali . . . . » 20
Rette perpendicolari . . . . » 24
Poligoni piani . . . . » 27
Il circolo . . . . » 34
Triangoli eguali . . . . » 38
Angoli di rette parallele con una linea trasversale . » 41

CAP. II.

Rette e piani perpendicolari fra loro . . . . » 46
Poliedri . . . . » 49
Cono - cilindro - sfera . . . . » 52
Addizione e sottrazione di segmenti . . . . . » 54
Addizione e sottrazione di angoli . . . . . . » 57
Misura dei segmenti e degli angoli . . . . . » 59
Aree . . . . » 62
Volumi . . . . » 73
Esercizi . . . . » 79

CAP. III.

Istrumenti ed oggetti di disegno . . . . . . » 84
Costruzioni fondamentali . . . . » 87
Costruzioni dei poliedri con cartoncino . . . . » 101
La retta, il piano e lo spazio illimitati . . . . . » 104

CAPITOLO I°

Nozioni preliminari

1. Un tavolo, un calamaio, un foglio di carta, una casa, un albero, la terra, la luna, il sole .... sono **corpi**; un' ora, una forza, un' idea .... non sono corpi.

L' estensione, il peso, il colore, la temperatura, la elasticità, la rigidezza .... sono **proprietà dei corpi**. Se di tutte le proprietà generali dei corpi noi consideriamo solamente qualcuna, ad es. la estensione, non tenendo conto delle altre, si producono in noi delle idee **astratte**.

I corpi considerati rispetto alla estensione, fanno nascere o risvegliano in noi l' idea di qualche cosa che li contiene, e che chiamasi *ambiente esterno* o **spazio**; perciò suolsi dire che ogni corpo occupa una parte dello spazio, la quale chiamasi *posto*, **luogo**, o *posizione* di esso corpo: se leviamo un corpo dal posto che esso occupa, questo posto può essere occupato da un altro corpo, ad es. dall' aria circostante.

2. Un granellino di sabbia, l' estremità di una punta sottile, un corpo che si consideri come non scomponibile in parti, oppure un piccolo segno fatto

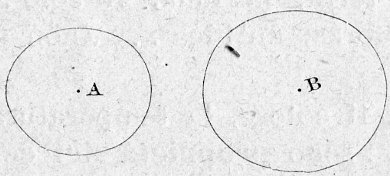
sulla carta o su altro corpo dalla punta di una matita, . . . , sono *punti materiali.*

Dall' immagine di punto materiale si ha l' idea astratta del **punto.**

Il punto si indica generalmente con una lettera maiuscola.

Siccome esistono diversi corpi, così possiamo dire: **Esistono punti distinti.**

Uno stesso punto può essere indicato con lettere differenti ad es. con *A* e con *B*: in tal caso diciamo che i punti *A* e *B coincidono;* ma in realtà è un solo punto che si dinota con due lettere diverse. Così, allorquando cerchiamo un punto *B* e troviamo che esso deve essere un punto *A* e non altri, diciamo che *A* e *B* coincidono. Similmente allorquando noi trasportiamo un pezzetto di carta sul quale sia segnato un punto *B*, in modo che i due punti *A* e *B* si trovino l'uno sopra l'altro, così da poterli ritenere come un unico punto, diciamo ancora che in quella posizione *A* e *B* coincidono.



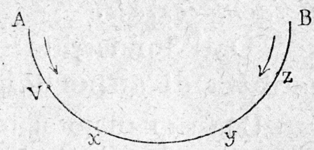
3. Un filo sottile, l' orlo di un foglio, il segno tracciato da una matita sopra un corpo facendola scorrere su di esso, . . . considerati come composti di punti materiali, sono *linee materiali.*

Dall'immagine di linea materiale si ha l'idea astratta di **linea.**

La linea si indica con una lettera minuscola, oppure con più lettere maiuscole.

4. Segnando in una linea dei punti *X Y Z*, vicini gli uni agli altri, e così seguitando si avrà sulla linea un **gruppo** di punti succedentisi in due ordini o **versi** differenti, come sarebbe a dire nel verso da sinistra a destra, e nel verso da destra

a sinistra. E fissato un punto X, gli altri punti della linea, considerati in un verso, ad es. da A verso B, si separano in due *classi*, così che quelli di una classe, come A, V, *precedono* X, e quelli dell'altra, come Y, Z, B, *seguono* X: e se X precede Y, Y segue X; e se X preeede Y ed Y precede Z, anche X precede Z.



Sistema lineare di punti, dicesi un gruppo di punti, il quale sia ordinato secondo due versi, l'uno opposto all'altro.

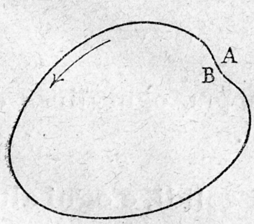
Le linee sono sistemi lineari di punti.

5. Un punto di una linea che non è preceduto, o che non è seguito da alcun altro punto dicesi **estremo**.

I punti A e B della linea tracciata nella figura precedente sono gli estremi della linea.

Una parte XY di linea è pure una linea, e dicesi anche **segmento**. Ogni punto che appartiene ad un segmento, e non è uno degli estremi, dicesi punto **interno** al segmento; ogni punto della linea a cui appartiene il segmento e non sia nè un estremo del segmento nè interno ad esso si dice **esterno** al segmento medesimo.

6. Se l'ultimo estremo B di una linea $A... B$, considerato a sè, coincide col primo estremo A, la linea dicesi **chiusa**. Quando però si considera la linea AB percorsa da A verso B, il punto B segue A.



Una linea che non è chiusa chiamasi **aperta**.

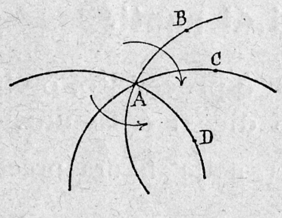
7. Un velo sottile, una pagina di un libro, ciò

che noi vediamo di un corpo, ... si chiamano *superficie materiali*.

Dall' immagine di superficie materiale si ha l'idea astratta di **superficie**.

Una superficie si indica con più lettere o minuscole o maiuscole.

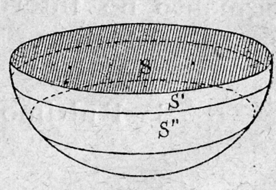
Sopra ogni superficie materiale possiamo segnare tanto dei punti, come delle linee. Possiamo segnare anche delle linee aventi un punto A in comune e che si seguono in due ordini, indicati ad es. dalle freccie. Ma se noi segniamo su



queste linee dei punti, non possiamo più dire di avere sulla superficie un sistema di punti dotato di due tali ordini, uno opposto all'altro, come in una linea; abbiamo invece un sistema di punti $ABCDEF\ldots$ che si possono considerare in quanti ordini si vogliano.

8. Ogni oggetto, il quale non sia nè punto, nè linea, nè superficie, dicesi *solido materiale*.

Dall' immagine di solido materiale abbiamo l'idea astratta di **solido**.



Se si considera un solido diviso in parti, ciò che termina una di queste parti è una superficie. Noi possiamo segnare dunque su ogni solido delle superficie S, S', S'' . . . che si seguono in due ordini, come sopra ogni superficie possiamo segnare delle linee che si seguono in due ordini, e sopra ogni linea dei punti che si seguono pure in due ordini.

9. I punti, le linee, la superficie, i solidi, e ogni altro gruppo di punti, considerato come ente unico, diconsi *figure geometriche*, o talvolta solamente **figure**.

punti materiali, le linee, le superficie e i solidi materiali, e in generale i gruppi di punti materiali servono di incentivo e di aiuto alla formazione della idea astratta di figura, e ci forniscono coll'immediata osservazione o mediante qualche semplice operazione eseguita su di essi, alcune proprietà che si assumono per comune consenso come proprietà primitive delle figure. Altre proprietà delle figure si possono tanto ricavare dall'osservazione immediata dei gruppi di punti materiali corrispondenti ad esse figure, quanto dedurre per mezzo di ragionamento da proprietà precedentemente stabilite. Il primo metodo dicesi *pratico*, il secondo *razionale* *).

I due metodi si aiutano e si completano a vicenda; il primo serve di incentivo e di verifica al secondo, e il secondo serve a stabilire con precisione le stesse proprietà primitive e a far conoscere le relazioni e le leggi geometriche che governano le figure, e quindi anche i corpi e l'ambiente che li contiene.

È per questo che anche i gruppi di punti materiali si chiamano *figure*.

La **Geometria** è la scienza delle figure.

DOMANDE ED ESERCIZI

Citare qualche esempio di corpi — qualche proprietà generale dei corpi.

Citare qualche esempio di punti materiali; di linee materiali.

Sopra una linea segnare un punto *A*, indi le due direzioni della linea, con una freccia, e i punti *B C D* in modo che, in una stessa direzione, *B* segua *A*, *C* segua *B* e *D* segua *C*. Come si chiama l'insieme dei punti *A B C D* così disposti?

Il gruppo delle stelle dell'Orsa maggiore non è un sistema lineare di stelle; renderlo tale assegnando alle stesse stelle indicate con *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, un determinato verso.

In che differisce una linea chiusa da una aperta?

Disegnare a mano libera dei sistemi lineari aperti, chiusi (a punti, a tratti, a tratti e punti alternati, a tratto continuo).

Citare qualche esempio di superficie materiale — di solido.

---

*) In questo libro facciamo uso del metodo pratico, come preparatorio al metodo razionale

La retta.

10. Un filo teso, ad es. un filo a piombo, un raggio di luce che entra per un forellino in una camera oscura . . . . sono *oggetti rettilinei.*

L' immagine degli oggetti rettilinei ci dà l'idea della linea che chiamasi **linea retta,** o solamente **la retta.**

11. Si possono costruire delle rette a mano libera con la matita; ma per tracciarle con maggiore esattezza si fa uso di un istrumento di legno o di metallo che si chiama *riga*; basta far scorrere la punta di una matita lungo l' orlo della riga stessa tenuta ferma sul foglio da disegno.

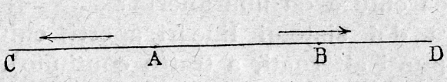


Quanto più l' occhio nostro è assuefatto all' immagine della retta, tanto più ci si accorge se una riga è, o non è, esatta. Ad es. la riga *CD* non è esatta.

Ove la riga non bastasse, si fa talvolta uso anche di uno spago teso fra i due punti *A* e *B*, facendo scorrere la punta della matita lungo lo spago, oppure annerendo, come fanno i decoratori di camere, lo spago con carbone, e poi, quando esso è teso, alzandolo nel mezzo e facendolo cadere sulla parete.

12. Ogni segmento della retta dicesi anche *tratto rettilineo,* o solamente **segmento**, o *tratto.*

La retta ricavata dall'osservazione è terminata nei suoi due versi da due punti distinti; nella maggior parte dei casi essa è contenuta in un'altra retta, come ad es. *AB* è contenuta in *CD*. La linea retta, la cui immagine noi ricaviamo dalla osservazione di oggetti rettilinei, è bensì un tratto rettilineo,

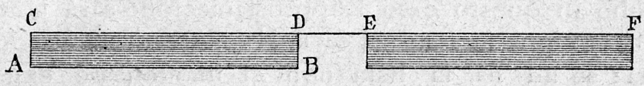


ma non teniamo conto che sia limitato da due certi punti, piuttosto che da due altri punti. Così per linea retta *AB* intendiamo anche il tratto *CD*, e un tratto *EF*, se *CD* è contenuto in *AB*, e così di seguito.

I versi della retta si chiamano anche *direzioni*.

Una linea composta di rette dicesi *spezzata rettilinea* o **spezzata;** una linea che non è retta, nè composta di rette, dicesi **curva**.

13. Sopra una retta segniamo con una riga *AB* il segmento *CD*, indi, spostando la riga stessa *AB*, segniamo il segmento *EF*. Confrontando i due segmenti *CD* ed *EF*, noi giudichiamo senza alcuna incertezza che sono **eguali**.



14. Se un segmento *a* è eguale ad un altro segmento *b*, si scrive: $a \equiv b$.

Qualunque sia il segmento *a*, si può ben dire che: $a \equiv a$.

E se $a \equiv b$, si ha che: $b \equiv a$.

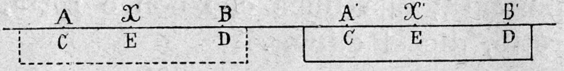
E se $a \equiv b$, e $b \equiv c$ si ha che: $a \equiv c$.

Per indicare la eguaglianza può anche usarsi il segno $=$, finchè questo non si adoperi con altro significato.

Se i segmenti *CD* ed *EF* sono eguali, ciò si esprime anche dicendo che i due punti *C* e *D* hanno tra loro **distanza eguale** a quella dei punti *E* ed *F*.

15. La eguaglianza di due segmenti, quando si tratti di oggetti rettilinei, come nelle presenti Nozioni, si verifica praticamente in diversi modi, più o meno precisi. Talvolta la verificazione si fa ad occhio, come ad occhio si può segnare sulla retta *r* un segmento *AB*, eguale ad un segmento *A'B'*, se l'occhio è bene esercitato, e se si tratta di piccoli segmenti.

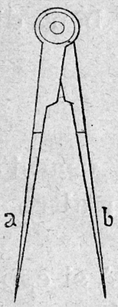
É noto che i soldati sono esercitati ad apprezzare ad occhio anche grandi distanze. Se si tratta di piccoli segmenti AB ed $A'B'$ si fa uso anche di una lista di carta, il cui orlo superiore si fa combaciare con la retta r, e si segnano sulla lista i punti C e D che combaciano con i punti A e B, indi si



trasporta la lista in modo che C venga a combaciare con A' e la retta CD della lista con la retta $A'B'$ della r: se anche i punti B' e D combaciano, allora i due segmenti AB ed $A'B'$ sono eguali.

Anche in questo caso l'approssimazione sarà tanto maggiore quanto più la lista di carta si manterrà nelle condizioni di prima; se ad es. la lista non si mantenesse egualmente tesa, allora AB non sarebbe più eguale ad $A'B'$.

Per segnare segmenti eguali e per verificare l'eguaglianza di due segmenti, si fa uso anche del *compasso*. Esso si compone di due asticelle di legno o di metallo, unite insieme nella parte superiore per mezzo di una cerniera, in modo che si possono allontanare ed avvicinare. Le due asticelle terminano in due punte sottili, ordinariamente di acciaio.



Per verificare se i due segmenti AB ed $A'B'$ sono eguali, si appoggia la punta fissa in A e si apre l'altra finchè viene a combaciare in B. Si trasporta poi il compasso in modo che la prima punta venga in A'; se l'altra passa per B', allora $AB \equiv A'B'$.

Ed anche in questo caso l'approssimazione sarà tanto più grande quando più esercitati si sarà nell'uso del compasso, così che nel trasporto le punte non si siano discostate.

La eguaglianza di due segmenti si deduce anche, e più spesso, per via di ragionamento. Così ad es. sapendo che $CD \equiv AB$ e che $EF \equiv AB$ deduciamo che $CD \equiv EF$.

La Geometria poi insegna come con altri mezzi si pos-

sano segnare praticamente dei segmenti eguali sopra la retta, anche quando essi non possono essere costruiti colla lista di carta o col compasso nel modo anzidetto.

16. Trasportando, come abbiamo fatto precedentemente, la lista di carta CD dalla posizione che ha in AB a quella che ha in $A'B'$ si vede che ogni punto E di CD combacia con un punto X di AB, e questo viene trasportato in un punto X' di $A'B'$, il quale corrisponde così al punto X di AB. I segmenti AX, XB sono rispettivamente eguali ai segmenti $A'X'$, $X'B'$ di guisa che si può dire:

Se due segmenti sono eguali, ad ogni punto dell'uno corrisponde un solo punto dell'altro, e le parti, che hanno per estremi punti corrispondenti, sono fra loro eguali.

17. Prolungamento di un segmento AB dicesi un altro segmento BC o AD situato sulla stessa retta, nella direzione da A a B o da B ad A.

La retta, quale deriva dagli oggetti rettilinei, *è sempre limitata*, per quanto possa essere prolungata praticamente, o intuitivamente.



18. Le seguenti proprietà di qualsiasi oggetto rettilineo sono proprietà fondamentali della retta considerata a sè:

Ogni segmento della retta non è uguale ad una sua parte.

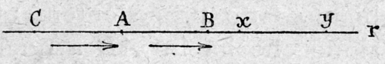
Ad es. il segmento AB della figura precedente non è eguale a DC. Ciò si verifica in ogni caso o ad occhio, o colla lista di carta o col compasso.

Sempre che l' estensione del campo della nostra osservazione lo permetta, possiamo verificare che:

Dati nella retta, un punto A e un segmento

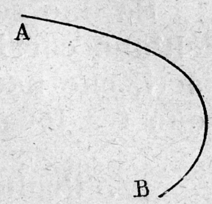
***XY*, vi sono nella direzione *XY* due segmenti *CA* ed *AB* eguali ad *XY*.**

Per la verifica basta far uso della solita lista di carta segnando dapprima su di essa un segmento eguale ad *XY* e facendola scorrere lungo la retta *r* nella direzione della freccia.



Ogni segmento della retta è invertibile.

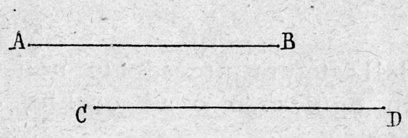
Così il segmento *AB* è eguale allo stesso segmento, considerato nella direzione opposta *BA*. Non possiamo dire la stessa cosa del segmento *AB* di una linea qualunque, come di quello qui accanto disegnato, perchè in esso la linea ha, verso l'estremità *B*, una forma diversa da quella che ha verso *A* e ricalcandola sopra un pezzo di carta da lucidi non potremmo rovesciandolo, far combaciare il segmento *AB* col segmento *BA*.



Per verificare che il segmento rettilineo *AB* è eguale al segmento *BA* basta ricorrere alla lista di carta o ad un filo teso o al compasso.

19. Un segmento *AB*, che è eguale ad una parte di un altro segmento *CD* dicesi **minore** di *CD*; e *CD* dicesi **maggiore** di *AB*. Ciò si esprime scrivendo: $AB < CD$, oppure: $CD > AB$.

Si verifica coi soliti mezzi, ed anche ad occhio che, dati due segmenti rettilinei, ha luogo uno ed uno solo dei tre casi seguenti: $AB \equiv CD$, $AB < CD$, $AB > CD$.



20. Altre proprietà della retta, considerata in sè cioè senza uscire da essa, sono le seguenti:

Ogni segmento viene diviso da un suo punto

in due parti le quali non hanno alcun altro punto in comune, vale a dire: **il segmento è una linea aperta**.

L'immagine stessa dell'oggetto rettilineo ci assicura della verità di questa proposizione: e questa si verifica anche per la retta, essendo essa, per quanto possa venir prolungata nel campo della nostra osservazione, pur sempre limitata da due punti.

21. Una retta limitata ad un punto e che si può prolungare in una sola direzione a partire da esso, dicesi **raggio**.



I due raggi nei quali viene divisa una retta da un suo punto diconsi **raggi opposti**.

22. La proprietà fondamentale della retta, considerata rispetto alle altre linee, è la seguente:

Se una retta ha due punti *A* e *B* che coincidono con due punti *C* e *D* di un'altra retta, anche gli altri punti della prima, o dei prolungamenti della prima, coincidono uno per uno con gli altri punti della seconda o dei suoi prolungamenti.

La proprietà suddetta si verifica trasportando un oggetto rettilineo finchè venga ad avere due punti in comune con un altro oggetto rettilineo; allora essi appartengono ad una medesima retta, vale a dire ogni punto dell' uno coincide con un punto dell'altro o con un punto del suo prolungamento.

Segnati dunque due punti sul foglio del disegno vi è una ed una sola retta che contiene quei punti, o, come si suol dire, che *passa* per quei due punti. Alcune volte si esprime questa importante proprietà della retta dicendo che essa è *individuata* o determinata da due dei suoi punti.

Riepilogando, le proprietà primitive della retta sono:

1) **Ogni segmento della retta non è uguale ad una sua parte.**

2) **Ogni segmento della retta è invertibile.**

Per quanto lo permetta la estensione dell' osservazione:

3) **Si può segnare sulla retta nell'uno e nell'altro verso a partire da qualunque suo punto un segmento eguale a qualsiasi altro segmento dato di essa.**

4) **Il segmento è una linea aperta.**

5) **La retta è individuata da due suoi punti.**

DOMANDE ED ESERCIZI

Citare qualche esempio di oggetto rettilineo.

Con quali mezzi si può disegnare un segmento rettilineo?

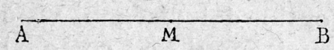
Tracciato un segmento *AB* costruire un altro segmento *CD* che sia tutto contenuto in *AB*; costruire un altro segmento *EF* che sia pure contenuto in *AB* e che sia eguale a *CD*.

Dati due segmenti *a* e *b* quanti e quali casi si possono verificare mettendoli a confronto? Quand'è che si dirà che *a* è maggiore di *b* e quando minore?

Quali sono le proprietà fondamentali della retta?

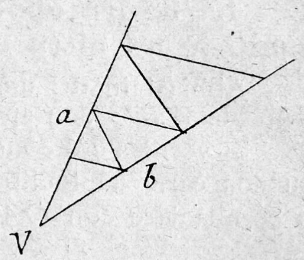
23. Ogni segmento *AB* della retta è divisibile per metà.

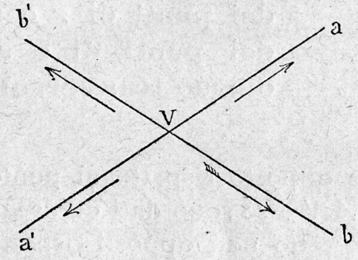
Tracciando un segmento *AB* sopra l'orlo di una lista di carta e ripiegando questa in modo che *B* cada in *A*, la ripiegatura stessa scompone il segmento in due parti eguali, *AM* ed *MB*.



Il punto *M* dicesi **punto medio** o *punto di mezzo* del segmento *AB*, e i segmenti *AM*, *MB* si chiamano **opposti** *rispetto al punto M*, o da *bande opposte del punto M*.

24. Dicesi **regione angolare di due raggi**, o **coppia completa di due raggi** *a* e *b* **che si incontrano**, la figura costituita dai punti di questi due raggi e dai punti di tutti i segmenti, che uniscono comunque un punto dell' uno con un punto dell' altro. Il punto comune *V* dei due raggi *a* e *b* dicesi il **vertice** della regione angolare o *punto d' incontro* dei due raggi *a* e *b*; e i raggi stessi diconsi i **lati** della regione medesima (o della coppia completa).

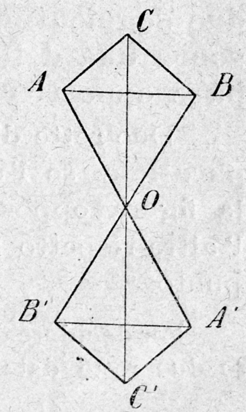




La regione angolare dei due raggi *a*, *b* si indica coi segni (*ab*) od : *ab*, od anche : *A VB*.

Due regioni angolari (due coppie complete di raggi) di raggi opposti (*ab*) e (*a'b'*) si dicono **regioni angolari fra loro opposte al vertice.** In due regioni angolari di raggi fra loro opposte al vertice i raggi dell' una sono i prolungamenti dei raggi dell' altra.

Rette parallele.



25. Due punti *A* e *A'*, equidistanti da un stesso punto *O* della retta *AA'* che li congiunge diconsi **fra loro opposti al punto** *O*.

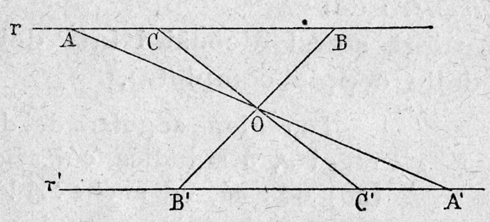
Due figure *ABC.... A'B'C'*,..nelle quali i punti dell' una sono opposti, ciascuno a ciascuno, ai punti dell' al-

tra, rispetto ad un punto *O*, diconsi figure **opposte l' una all' altra rispetto al punto** *O*.

La figura opposta ad una retta rispetto ad un punto è un altra retta.

Abbiasi infatti una retta *ABC*..., e si costruisca la figura opposta *A'B'C'* ... rispetto ad *O*.

Si verifica col compasso, oppure ricalcando la figura *OAB* su una carta da lucidi e rovesciando in modo che *OA* venga a combaciare con *OA'*, e *OB* con *OB'*. che il punto *C'* è situato sulla retta *r*, determinata da *B'* e *A'*.

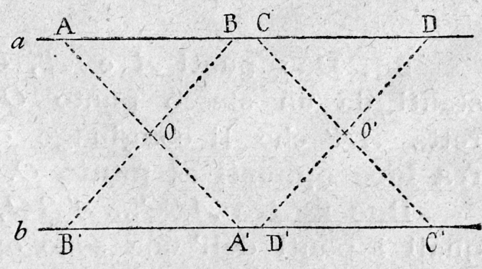


I segmenti *AA'*, *BB'*... che uniscono dei punti di *r* con dei punti di *r'* si dicono **trasversali** delle due rette *r* ed *r'*.

26. Se *r* ed *r'* sono due rette opposte rispetto al punto di mezzo *O* di una loro trasversale *AA'* e se sono dati due segmenti *CD* e *C'D'* eguali delle due rette non opposti rispetto ad *O*, si verifica facilmente, che essi sono opposti rispetto ad un altro punto *O'*, che è punto medio dei segmenti *CC'*, *DD'*. Quindi si può dire che:

Se due rette sono opposte rispetto ad un punto, due segmenti qualunque eguali fra loro situati uno sopra una delle due rette e l' altro sull'altra sono pure opposti rispetto ad un punto.

Due rette diconsi **parallele** se l'una è la figura opposta all' altra rispetto ad un punto.



Per decidere dunque se due rette date *a* e *b*

sono parallele si procederà così: Si unisca un punto A della prima con un punto A' della seconda; si dimezzi il segmento AA' in O e si unisca un altro punto B della prima retta con O. Se il prolungamento di BO incontra la seconda retta in un punto B' e tale che BO sia eguale a OB', la seconda retta si dirà parallela alla prima.

Data la retta r e il punto A' fuori di essa, e condotta la trasversale $A'A$ e determinato il punto medio O di AA' e il punto B' opposto di B rispetto ad O, la retta $A'B'$ è parallela ad r, ed è unica perchè è possibile costruire un solo punto B' opposto a B. Dunque:

Per un punto A' dato fuori di una retta r e dei suoi prolungamenti si può condurre una ed una sola retta r' parallela a quella retta r.

DOMANDE ED ESERCIZI

Che significa che i punti A ed A' sono opposti l'uno all'altro rispetto ad un dato punto O?; che una figura F è opposta ad un'altra F' rispetto ad O?

Quale è la figura opposta ad una retta rispetto ad un punto O preso fuori di essa?

Che significa che due rette sono fra loro parallele?

Disegnare a mano libera e in varie posizioni rispetto al disegnatore: dei segmenti a punti, a tratti, a tratto e punti alternati, a tratto continuo:

un segmento eguale ad un altro dato, segnando su di essi alcune coppie di punti corrispondenti (nella loro corrispondenza di eguaglianza);

I prolungamenti di un segmento dato, entro i limiti del foglio del disegno.

Data una figora $ABCDEF$ costruire la figura opposta rispetto ad un dato punto O.

Dividere un segmento dato in due, quattro, otto parti eguali.

Condurre per un punto la parallela ad una retta.

Il piano.

27. La superficie di uno specchio d' acqua in riposo, un foglio steso sopra una tavoletta, una faccia di un cristallo...., sono *oggetti piani*.

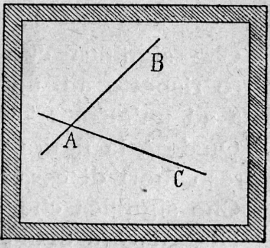
L' immagine degli oggetti piani ci dà l' idea della **superficie piana**. Se si immaginano prolungate per quanto è possibile le rette di una superficie piana, la figura che si ottiene si chiama **piano**.

Le seguenti proprietà di ogni oggetto piano sono proprietà fondamentali del piano:

Ogni retta che unisce due punti di un piano giace tutta quanta nel piano.

Il piano è determinato:

1) **da una retta e da un punto situato fuori di essa e dei suoi prolungamenti:**



Con ciò intendiamo dire che dati una retta ed un punto fuori di essa o de' suoi prolungamenti, vi è un piano ed uno solo che contiene quella retta e quel punto o, ciò che è lo stesso, che ogni altro piano il quale contenesse la medesima retta e il medesimo punto coinciderebbe punto per punto col primo.

Si segnino due punti *A* e *B* di un foglio di carta piano, e si tracci la retta *AB*, la quale sarà tutta contenuta nel piano del foglio: imaginando che un secondo foglio di carta pure piano giri attorno alla retta *AB* a guisa di porta intorno ai suoi cardini, tosto che questo secondo foglio si troverà in tale posizione che un suo punto coincida con un punto *C* del primo foglio che non sia sulla retta *AB*, i due fogli combacieranno punto per punto.

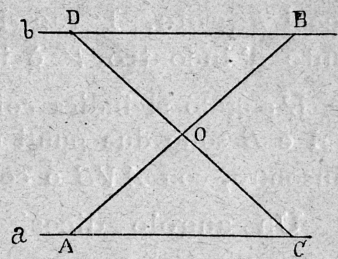
2) **da tre punti che non sono in linea retta:**

Tre punti *ABC* non situati in linea retta determinano pure il piano, perchè congiungendone due *A* e *B* di essi con una retta *AB* si ricade nel caso precedente.

3) **da due rette che s'incontrano in un punto:**

Se si tratta di due rette *AB* e *AC* le quali si incontrano in *A*, basta osservare che i tre punti *A B C* non sono in linea retta e così si ricade nel caso 2).

4) **da due rette parallele.**



Se *a* e *b*, sono due rette parallele, e se *O* è il punto medio di un loro segmento trasversale *AB*, si osserverà che il piano determinato da *O* e dalla retta *a* contiene le rette *OA* e *OC*, e quindi i punti *D* e *B*, quindi la retta *b*; cioè le parallele *a* e *b* giacciono nell' unico piano individuato dal punto *O* e dalla retta *a* o *b*.

Riepilogando, le proprietà essenziali del piano sono:

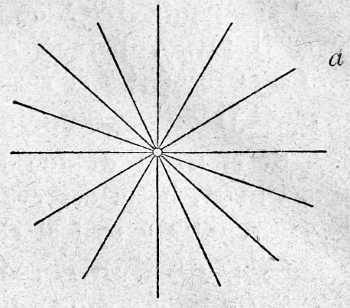
Ogni retta che unisce due punti di un piano giace tutta sul piano.

Il piano è individuato:

1) **da una retta ed un punto situato fuori di essa;**
2) **da tre punti che non sono in linea retta;**
3) **da due rette che s'incontrano in un punto;**
4) **da due rette parallele.**

28. Tutte le rette del piano che passano per un punto *P* di esso, o tutti i raggi del piano uscenti dal punto *P*, costituiscono una figura che chiamasi **fascio di rette** o **fascio di raggi**. E il punto *P* dicesi il **centro** del fascio.

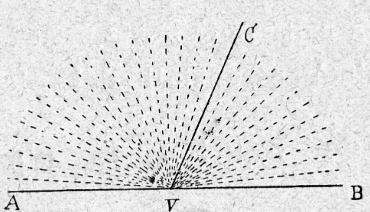
I raggi del fascio si seguono in due ordini che si chiamano: **versi** del fascio. Partendo da un raggio *a* in uno dei suoi versi, e percorrendo tutto il fascio si torna al raggio *a*. È perciò che il fascio dicesi *chiuso*.



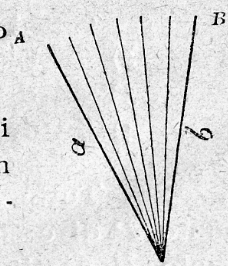
29. Una parte del fascio limitata da due raggi *a* e *b* dicesi **angolo**. I raggi *a* e *b* sono i **lati**, e il loro punto d' incontro *V* è il **vertice** dell' angolo.

L' angolo si indica col segno *ab*, o con (*ab*) od ancora se *A* e *B* sono due punti dei raggi *a b*, e *V* il loro punto d' incontro, con $\widehat{AVB}$ o con AVB.

Un angolo dicesi **convesso** se i prolungamenti dei suoi lati sono esterni all'angolo; dicesi **piatto** se i suoi lati sono sulla medesima retta e opposti rispetto al vertice; dicesi **concavo** se non è nè convesso nè piatto.



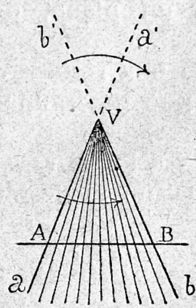
Due raggi *a* e *b* di un fascio determinano due angoli: questi angoli costituiscono nel loro insieme l' intero fascio.



Per angolo di due raggi *a* e *b* si intende sempre e da tutti l' angolo non concavo, eccetto che non si dica diversamente.

I versi dell' angolo sono determinati da quelli di un segmento *AB* che si appoggia ai lati dell' angolo.

L'angolo di due raggi, e la regione angolare di due raggi con vertice, non sono propriamente la stessa figura; l'angolo appartiene alla regione angolare. Ad es. l'angolo AVB appartiene alla regione angolare dei raggi a b perchè i raggi dell' angolo incontrano il segmento AB e quindi appartengono alla regione stessa. Il divario fra la regione angolare di due raggi (considerata come superficie) e l'angolo, sta in ciò che la regione è un sistema di punti composto dei punti dei due raggi dati, e dei punti dei segmenti che li uniscono a due a due, mentre l'angolo è un sistema di raggi uscenti da uno stesso punto; in altre parole la regione angolare è una porzione di piano cioè una *superficie* e l'angolo è una porzione di *fascio*, cioè un sistema lineare di raggi. È, se vogliamo, lo stesso ente, ma considerato composto in due diversi modi: così avviene che ad es. un esercito ora lo consideriamo come un insieme di soldati, ora come un insieme di compagnie ed ora come un insieme di brigate.



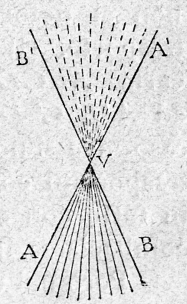
30. Due angoli si dicono **adiacenti** se hanno il vertice in comune, un lato in comune e gli altri due lati posti sulla medesima retta e da bande opposte.

Ad es. i due angoli AVC, CVB della figura al n. 29 sono adiacenti.

Due angoli adiacenti costituiscono adunque nel loro insieme un angolo piatto.

Due angoli diconsi **opposti al vertice** se i lati dell' uno sono i prolungamenti dei lati dell' altro.

Ad esempio gli angoli AVB, $A'VB'$, sono opposti al vertice.



DOMANDE ED ESERCIZI.

Citare esempi di oggetti piani.

Che nome si dà alla figura che risulta prolungando per quanto è possibile le rette di una superficie piana?

Se una retta ha due dei suoi punti sopra un piano, ove giacciono tutti gli altri punti della retta?

Che significa che un piano è determinato da una retta e da un punto fuori di essa; in quali altri modi si può determinare un piano?

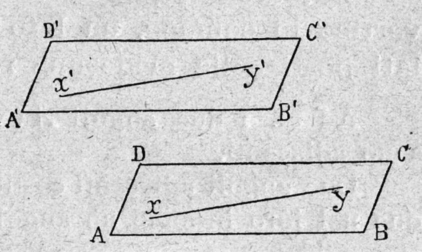
Come è costituita la figura che si chiama fascio di raggi; che intendesi per angolo di due raggi uscenti da un medesimo punto?

Che divario c' è fra angolo (ab) e regione piana (ab)?

Che angolo è l'angolo che dicesi piatto?

Delle figure eguali.

31. Se noi abbiamo ad es. due pezzetti di carta $ABCD$ e $A'B'C'D'$, e se possiamo verificare che trasportando il primo sul secondo ogni punto del primo coincide con un punto del secondo pezzetto, e ciascun punto del secondo coincide con un punto del primo, noi giudichiamo subito che i due pezzetti di carta sono eguali. Sottintendiamo però che il pezzetto di carta sia un corpo *rigido*, vale a dire non si deformi durante il trasporto. Il pezzetto di carta $ABCD$ sarà eguale ad $A'B'C'D'$ anche se per caso avessimo un terzo pezzetto di carta $EFGH$ il quale trasportato convenientemente sul primo $ABCD$ combaciasse in tutto con esso, e trasportato poi sul secondo $A'\ B'\ C'\ D$ combaciasse in tutto anche con questo.



Però nel momento in cui i due pezzetti $ABCD$ e $A'B'C'D'$ combaciano l'uno coll'altro, possiamo ben dire: 1) che *ad ogni punto dell'uno corrisponde un unico punto dell'altro* (quello

che con esso coincide), 2) che *i segmenti che congiungono a due a due i punti del primo sono rispettivamente eguali ai segmenti che congiungono i punti corrispondenti del secondo.*

Così se un corpo si trasporta da una posizione M ad un'altra N, fra le figure M ed N valgono le stesse proprietà 1) e 2) riscontrate per i due pezzetti eguali $ABCD$, $A'B'C'D'$.

Se poi consideriamo un solo pezzetto $ABCD$ e lo poniamo a confronto con la sua immagine $A''\ B''\ C''\ D''$ prodotta da uno specchio piano, non abbiamo alcuna difficoltà a ritenere che $ABCD$ è eguale ad $A''B''C''D''$, sebbene in questo caso non sia possibile verificare l'eguaglianza mediante il trasporto di $ABCD$; e ciò perchè i due oggetti $ABCD$, $A''B''C''D''$, considerati ciascuno a sè, ci si presentano in tal modo, che ogni proprietà o giudizio che si può esprimere dell'uno si può anche dire dell'altro. Così noi diciamo ad es. che il pollice della mano sinistra è eguale al pollice della mano destra sebbene non sia possibile fare la verifica mediante il trasporto dell'uno sull'altro; ma solo perchè le impressioni tattili, visive ... dell'uno e dell'altro ce li fanno apparire come tali.

Anche del pezzetto $ABCD$ e della sua immagine $A''B''C''D''$ possiamo dire, nel momento che li riconosciamo eguali, che:
1) *ad ogni punto dell'uno corrisponde un solo punto dell'altro;*
2) *i segmenti che congiungono i punti del primo sono eguali a quelli che congiungono i punti corrispondenti del secondo.*

In generale allorquando nel confronto fra due oggetti distinti A e B, considerati ciascuno a sè, ogni giudizio che possiamo fare sopra l'uno possiamo ripeterlo per l'altro, noi diciamo comunemente che que' due oggetti sono *eguali*. Applicando questo criterio alle figure, abbiamo due specie di figure eguali; e cioè **figure eguali per sovrapposizione, o per congruenza** (o congruenti) e **figure eguali per simmetria** (o simmetriche).

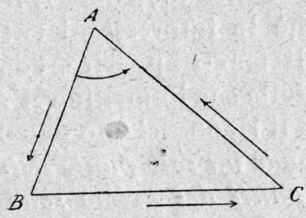
Che due figure si possano riconoscere eguali o per congruenza o per simmetria, sta però sempre il fatto che:

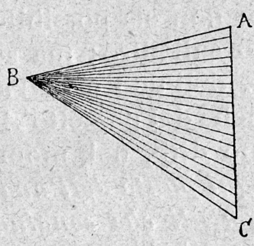
Due figure qualunque F ed F', le quali siano o parti di un piano, o parti dello spazio, sono **eguali,**

se a ciascun punto dell'una corrisponde un unico punto dell' altra, e se sono fra loro eguali i segmenti che uniscono i punti corrispondenti.

Se poi due figure F ed F' non fossero o parti di un piano o parti dello spazio, esse sono **eguali** se sono determinate da punti corrispondenti di altre due figure piane eguali, o di altre due figure solide eguali.

Ad es. la figura composta dei tre punti ABC non situati in linea retta e dei punti situati sui segmenti AB, AC, BC, senz'altro, non è propriamente una parte del piano: essa è una linea, non già una superficie; ma possiamo ben dire che è perfettamente determinata da quell' altra figura che è veramente una parte di piano che si ottiene congiungendo anche i punti del segmento AC con B, ecc. Quando dunque noi avessimo due siffatte figure non parti di uno stesso piano,





ma pure situate nel piano, per decidere della loro eguaglianza basterebbe osservare se sono determinate da punti corrispondenti di altre due figure piane, eguali fra loro. *)

32. Esempi di figure eguali.

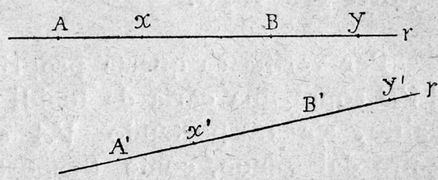
Entro il campo dell' osservazione vediamo che è sempre verificata la seguente proprietà:

---

*) Dalla Geometria razionale, che parte dal criterio, quale noi abbiamo sopra esposto, per dedurre le regole che servono per la verifica e per la costruzione delle figure eguali, risulta appunto provata la verità del principio sopraccennato e cioè che ogni giudizio che si può esprimere per l' una si può esprimere anche per l'altra figura ad essa eguale.

1. **Date due rette, si può segnare in una delle due un segmento eguale a un segmento dato dell' altra.**

Se r ed r' sono le due rette, siccome una stessa riga EF può essere trasportata in modo da avere due dei suoi punti E ed F in comune sia con due punti A e B di r, che con due punti A' e B' di r' ne risulta che $AB \equiv A'B'$. Possiamo anche facilmente verificare che ai punti

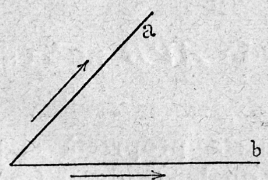


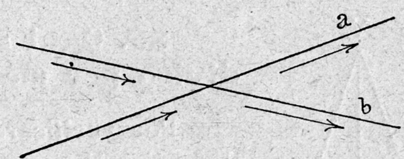
$AXBY$ della r corrispondono i punti $A'X'B'Y'$ della r', e che i segmenti corrispondenti, come AB e $A'B'$, sono eguali. Perciò si può stabilire tra le due rette una corrispondenza di eguaglianza anche se non sempre si può far corrispondere, nei limiti delle costruzioni pratiche, ad ogni punto dell' una un punto dell' altra.

2. **Una regione angolare** (ab) è **eguale alla sua inversa** (ba), ossia la regione di cui il primo lato è a e l' altro b è eguale alla regione di cui il primo lato è b e l' altro a.

Un angolo (ab) **è eguale al suo inverso** (ba).

Ricalcando sopra un pezzetto di carta da lucidi la regione (ab) e poi rovesciando la carta in modo che la copia di a



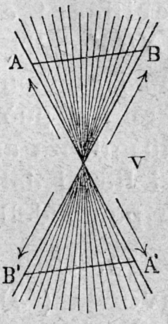


*) Veramente qui trattandosi di rette e di raggi limitati sarebbe meglio dire: Una regione angolare di rette (raggi) eguali è eguale alla sua inversa. Un angolo di lati eguali è eguale al suo inverso.

combaci con *b* e le freccie rimangano le stesse, si trova che la copia di *b* coincide con *a*. Lo stesso dicasi per l'angolo.

3. **Due regioni angolari opposte al vertice sono eguali fra loro. Due angoli opposti al vertice sono eguali fra loro.**

Per verificare questa proprietà basta ricalcare la regione *AVB* sopra una carta da lucidi e farla poi combaciare con l'altra, sia trasportando *VA* su *VA'* e *VB* su *VB'* senza uscire dal piano, come trasportando *VA* su *VB'* e *VB* su *VA'* uscendo dal piano della figura *B'VA'*.

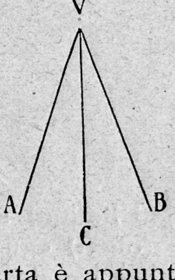


Entro il campo dell'osservazione verificasi pure che:

4. **Dati due piani, si può tracciare in uno di essi una figura eguale a qualunque figura dell'altro.**

Due fogli di carta piani egualmente estesi possono sempre farsi combaciare fra loro, o con un terzo foglio pure piano.

Rette perpendicolari.



33. **Ogni angolo *AVB* può essere diviso per metà.**

Per verificare questa proprietà si piega il foglio di carta sul quale sta descritto l'angolo *AVB* in due, in modo che il lato *VB* venga a coincidere con *VA*; il raggio *VC*, secondo il quale viene ad essere piegata la carta è appunto quello che dimezza l'angolo *AVB*, cioè tale che gli angoli *AVC*, *CVB* sono fra loro eguali.

La retta che divide per metà un dato angolo dicesi **bissettrice** dell' angolo.

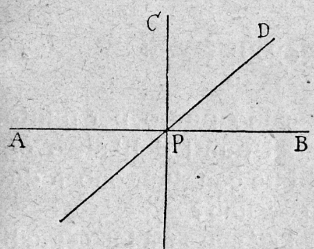
L'angolo metà di un angolo piatto dicesi **angolo retto.**

34. Due rette diconsi fra loro **perpendicolari** se i quattro angoli da esse formati sono tutti eguali fra di loro.

La bissettrice di un angolo piatto è *perpendicolare* alla retta, sulla quale si trovano i due lati dell'angolo piatto medesimo.

Ad es. la retta PC della figura è perpendicolare alla retta AB; il punto P si chiama **piede** della perpendicolare CP. Invece la retta PD non è perpendicolare alla AB: la retta PD dicesi **obliqua alla** AB.

Il segmento CP compreso fra il punto C e il piede P della perpendicolare condotta da C alla retta AB dicesi **segmento normale** (o **distanza**) **del punto** C **dalla retta** AB.



Distanza di due rette parallele dicesi un segmento normale alle due rette e compreso fra esse.

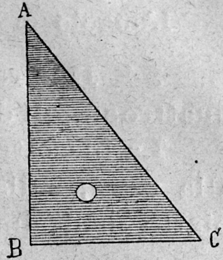
35. Se un angolo ab è eguale ad una parte cd di un altro angolo, si dice che il primo ab è **minore** del secondo, oppure che il secondo cd è **maggiore** del primo; e si scrive: $ab < cd$ oppure: $dc > ba$.

Dati due angoli ab e cd, si verifica sempre uno ed uno solo dei tre casi: $ab < cd$, $ab \equiv cd$, $ab > cd$.

36. Un angolo minore di un angolo retto dicesi **acuto**, e un angolo maggiore di un angolo retto dicesi **ottuso.**

Nella fig. del num. 34 l'angolo APC è retto, DPB è acuto e APD ottuso.

Per disegnare degli angoli retti si fa uso di uno strumento di legno, somigliante alla figura qui accanto, detto *squadra* e di cui i lati perpendicolari BA, BC in prossimità del foro circolare diconsi *cateti* e il loro punto d'incontro B *vertice*.



Volendo condurre per un punto B' di una retta $B'C'$ la perpendicolare alla retta stessa $B'C'$, basta far coincidere un cateto della squadra colla retta $B'C'$ in modo che il vertice B della squadra cada in B'; indi si fa scorrere la punta di una matita lungo l'altro cateto BA della squadra a partire da B. Mediante la squadra si verifica poi che:

Gli angoli retti sono eguali fra loro.

In uno stesso piano, da un dato punto, si può condurre una e una sola perpendicolare ad una retta data, del piano.

DOMANDE ED ESERCIZI.

Allorquando due oggetti piani combaciano punto per punto, che possiamo dire dei punti dell' uno e dei punti dell' altro oggetto? e che possiamo dire dei segmenti che congiungono a due a due i punti che si corrispondono uno per uno?

Che significa che due parti di piano F ed F' sono fra loro eguali?

Che significa che una figura F non è parte di piano? Citare qualche esempio.

Che significa che due figure F ed F' che non sono parti di piano, sono fra loro eguali?

Che retta è la bissettrîce di un angolo?

Che significa che due rette del piano sono fra loro perpendicolari?

Che retta è la bissettrice di un angolo piatto?

Disegnare a mano libera e in posizioni diverse:

un fascio di rette, un fascio di raggi, un angolo, e verificare se esso è convesso, piatto o concavo;

due angoli adiacenti; due angoli non adiacenti;

due angoli opposti al vertice;

una coppia di raggi e l'angolo di due raggi.

Date due figure eguali *ABC*, *A'B'C'* segnare i punti *x'y'z'*... della seconda che corrispondono a certi punti *xyz*.., segnati sulla prima.

Disegnare una figura del foglio di disegno che sia parte di un piano; e un'altra che non sia parte del piano.

Data una figura chiusa che non sia parte del foglio di disegno segnare la parte di piano da essa determinata.

Dividere a mano libera un angolo dato per metà.

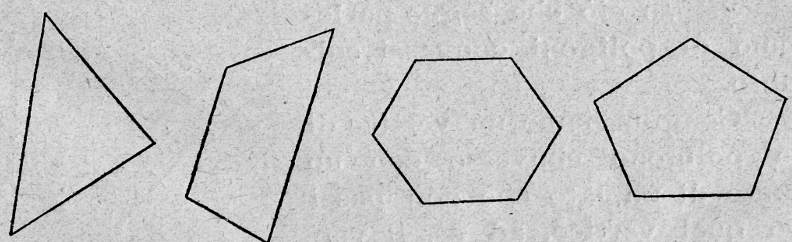
Tracciare a mano libera un angolo retto.

Condurre a mano libera e da un punto dato la perpendicolare ad una retta data, quando il punto è sulla retta e quando esso è fuori o sia un estremo della retta.

Poligoni piani.

37. Diciamo **poligono** la figura data da tre o da più di tre punti del piano, i quali non siano a tre a tre in linea retta, e dalla linea chiusa costituita dai segmenti che li congiungono a due a due in un dato ordine. Secondo che i punti dati sono tre, quattro, cinque, sei...., il poligono dicesi **triangolo, quadrangolo, pentagono, esagono**, ecc.

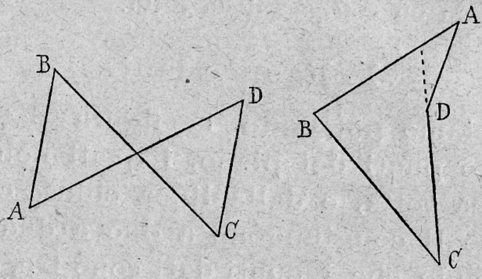
I punti dati si chiamano i **vertici**, e i segmenti che li uniscono a due a due nell' ordine dato, **lati** del poligono. I segmenti che uniscono due vertici non consecutivi diconsi **diagonali**, e gli angoli determinati dai lati successivi e dai loro prolungamenti, **angoli** del poligono.



Le figure qui sopra rappresentano ordinatamente un triangolo, un quadrangolo, un esagono e un pentagono.

Il poligono dicesi **convesso** se nessun lato, o prolungamento di lato, incontra in punti interni gli altri lati: **intrecciato** se un lato incontra un altro lato in un punto interno; **concavo** se qualcuno dei prolungamenti dei lati incontra un altro lato in un punto interno.

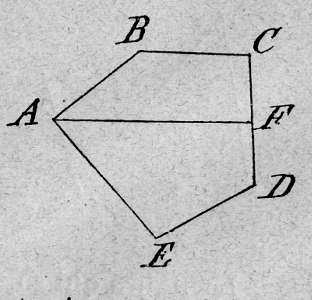
I quattro poligoni della figura precedente sono tutti convessi. Nelle figure qui sotto abbiamo un quadrangolo intrecciato e uno concavo.



Un poligono convesso ha tanti angoli quanti sono i lati.

Il triangolo è sempre un poligono convesso. E tre punti non in linea retta danno sempre un triangolo solo, mentre quattro, cinque . . . punti determinano differenti quadrangoli pentagoni..., e ciò secondo l'ordine in cui quei punti si considerano.

38. In ciò che segue parleremo di poligoni convessi soltanto.



Congiungiamo un vertice di un poligono convesso con un punto di un lato che non passi per quel vertice, ad es. il vertice A di un pentagono $ABCDE$ col punto F del lato CD; ogni punto interno del seg-

mento AF così ottenuto dicesi **interno** del poligono convesso. E ogni punto del piano che non sia punto di qualche lato, nè sia interno del poligono dicesi **esterno**.

39. Per **poligono** intendesi talora non soltanto la figura costituita dalla linea chiusa determinata dai lati, ma anche la figura costituita dai punti interni, ossia la porzione di piano che si ottiene unendo un vertice coi punti della linea suddetta.

Quando per poligono si intende la detta porzione di piano, la linea chiusa chiamasi **contorno** o **perimetro** del poligono. E per perimetro intendesi anche la somma dei lati del poligono.

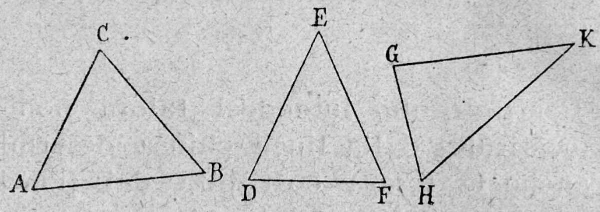
Non è possibile far confusione fra il poligono, considerato come linea e il poligono, considerato come superficie, perchè dal contesto stesso del discorso apparisce subito di per sè di quale dei due si intenda parlare. Talora poi è indifferente considerare o l'uno o l'altro.

Nella Geometria conviene spesso usare lo stesso vocabolo per indicare, senza dar luogo a confusione, enti fra loro diversi, ma dipendenti l'uno dall'altro.

Così avviene ad es. che con lo stesso vocabolo *cubo* tanto intendiamo ciò che si vede di un *dado* quanto tutto il dado medesimo, o il posto che esso occupa nello spazio.

Così nella pratica noi diciamo *minuto primo* tanto la sessantesima parte dell'ora che è una durata, quanto la sessantesima parte di quell'angolo che si chiama grado. Così collo stesso vocabolo scatola noi intendiamo soventi tanto la superficie, quanto il solido formato dalla scatola stessa. E quando non è necessario far distinzione, risulta dal discorso stesso se intendiamo l'uno o l'altro degli oggetti designati con lo stesso vocabolo. È un metodo questo che serve anche in matematica per non dover usare un numero troppo grande di vocaboli.

40. Di ogni triangolo ABC suolsi dire che il ver-



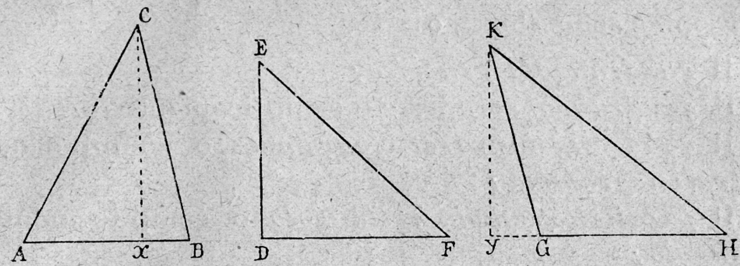
tice A è **opposto** al lato BC e il lato BC è opposto al vertice A; e così B ed AC, C ed AB diconsi opposti. E si suole pur dire che gli angoli CAB, ABC, BCA sono rispettivamente **opposti** ai lati BC, AC, AB.

Rispetto ai lati il triangolo dicesi **equilatero,** come ABC, se ha tutti e tre i lati eguali: **isoscele,** come EDF, se ha due lati eguali; **scaleno,** come GHK, se tutti e tre i lati sono diseguali.

Rispetto agli angoli abbiamo il triangolo **acutangolo,** come ABC, nella figura di pag. seg., che ha tutti gli angoli acuti; il triangolo **rettangolo,** come EDF, che ha un angolo retto in D; il triangolo **ottusangolo,** come GHK, che ha un angolo ottuso in G.

I lati dell'angolo retto di un triangolo **rettangolo** diconsi **cateti;** il lato opposto all'angolo retto dicesi **ipotenusa**.

41. La perpendicolare condotta da un vertice di un triangolo al lato opposto, e limitata dal vertice e dal lato opposto, o da un prolungamento di questo, dicesi **altezza** del triangolo relativa a quel lato, il quale si chiama **base**.

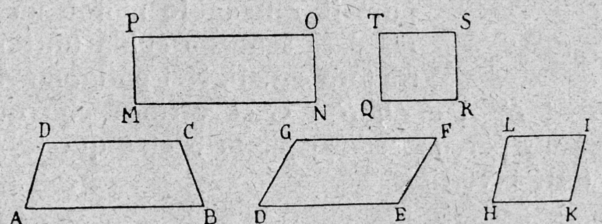


Nel triangolo acutangolo *ABC* l'altezza *CX* è interna al triangolo; nel triangolo rettangolo *DEF* l'altezza relativa al lato *DE* è lo stesso lato *ED*; e nel triangolo *GHK* l'altezza *KY* relativa al lato *GH* è esterna al triangolo.

La retta che congiunge un vertice di un triangolo col punto medio del lato opposto dicesi **mediana** del triangolo.

E le bissettrici degli angoli del triangolo diconsi le **bissettrici** del triangolo.

42. Fra i quadrangoli vanno notati: il **trapezio** che ha



due lati paralleli (**basi**) come il quadrangolo *ABCD*; il **parallelogramma** che ha due coppie di lati paralleli, come *DEFG*.

Fra i parallelogrammi vanno notati: il **rombo** che ha tutti i lati eguali, come *HKIL*; il **rettangolo** che ha tutti gli angoli retti, come *MNOP*; il **quadrato** che ha tutti i lati eguali fra loro e gli angoli retti, come *QRST*.

Il segmento perpendicolare alle basi del trapezio o del paral-

lelogramma dicesi **altezza** del trapezio o del parallelogramma.

Riepilogando abbiamo:

il *quadrangolo generico;*

il *quadrangolo trapezio* o semplicemente il *trapezio;*

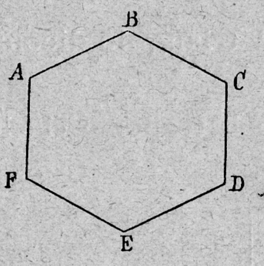
il *quadrangolo parallelogramma* o semplicemente il *parallelogramma;*

il *parallelogramma rettangolo* o semplicemente il *rettangolo;*

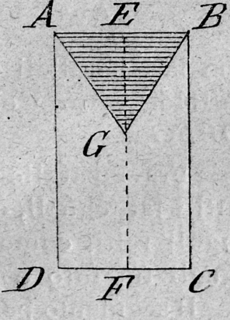
il *parallelogramma rombo* o semplicemente il *rombo;*

il *parallelogramma rettangolo e rombo* o semplicemente il *quadrato.*

43. Un poligono, che ha tutti i lati eguali fra di loro e tutti gli angoli uguali fra di loro, dicesi poligono **regolare**.

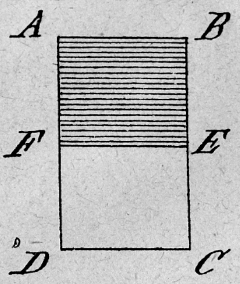


Ad esempio il quadrato è un poligono regolare; e regolare è pure il poligono *ABCDEF.* Invece il rombo non è un poligono regolare sebbene abbia i lati tutti eguali fra loro, e così pure il rettangolo non è un poligono regolare sebbene abbia tutti gli angoli fra loro eguali. Nel poligono *ABCDEF.* unendo *B* ed *E*, *A* e *D*, *F* e *C* si verifica che queste diagonali passano per uno stesso punto e che questo è equidistante da tutti i vertici.



Volendo procurarsi con una listerella di carta *ABCD* di larghezza *AB* e alquanto lunga un **triangolo equilatero,** si pieghi in due la lista così da segnare la retta *EF,* indi servendosi di un'altra listerella di lunghezza eguale ad *AB,* si trasporti questa lunghezza in modo che essa venga in *AG*; indi

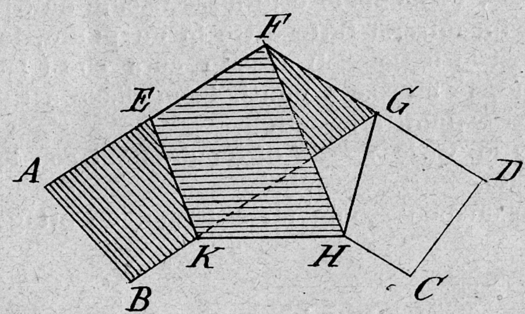
si ritagli lungo *AG* e *BG*: si avrà il triangolo regolare *ABG* di lato *AB*.



Molto più facile è l'ottenere un **quadrato** con una lista come la precedente *ABCD*; basta segnare su *AD* e su *BC* due segmenti *AF*, *BE* eguali ad *AB* e poi ritagliare lungo la retta *FE*.

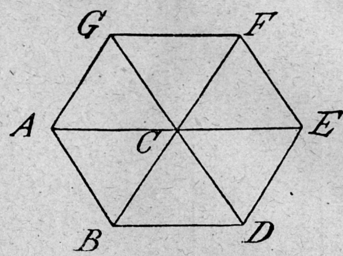
Volendo procurarsi un **pentagono regolare** con una listerella larga *AB* e lunga 5 o 6 volte *AB* si può fare così:

Si prende la lista per le due estremità in modo che l'indice della mano sinistra sia sotto, e il pollice sopra il margine *AB*, mentre l'indice della mano destra sia sopra e il pollice sotto il margine *CD*; indi si muove la destra come



per fare il nodo della cravatta, piegando la lista in prima ad arco e poi passando il margine *CD* sotto quest'arco e stringendo dolcemente e a poco a poco il nodo, affine di non lacerare la carta negli angoli. Si avrà così un pentagono regolare *EFGHK* (ritagliando lungo *EK* e *GH*) di lato *EF*, un po' più lungo di *AB*.

Volendo in fine avere un **esagono regolare** si costruisca dapprima un triangolo equilatero ABC in disparte, e poi lo si ricalchi sopra la carta da lucidi; si rivolti la copia in CBD, poi in CDE in CEF, in CFG e in CGA, finchè si ritorni sul triangolo ABC. Ritagliando poi lungo $ABCEFG$, si avrà l'esagono regolare di lato AB.



ESERCIZI.

Disegnare a mano libera:

un triangolo scaleno, un triangolo isoscele, un triangolo equilatero;

un triangolo acutangolo, un triangolo rettangolo, un triangolo ottusangolo;

le altezze, le mediane e le bissettrici di un triangolo (le altezze devono incontrarsi tutte e tre in un punto, le mediane in un altro, e così le bissettrici) avendo cura che i lati risultino a tratto continuo, le altezze a punti, le mediane a tratti, e le bissettrici a tratti e punti alternati.

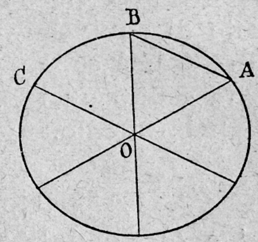
Disegnare le varie specie di quadrangoli con le loro diagonali punteggiate.

Disegnare un pentagono, un esagono, un ottagono.

Il circolo.

44. Dato un fascio di raggi avente il centro in un punto O, se sopra ciascun raggio si segnano dei punti A B, . . . equidistanti da O, la linea così ottenuta si chiama **circonferenza**.

La circonferenza è dunque la linea costituita da tutti i punti del piano equidistanti da un punto di esso.



Questo punto dicesi **centro** della circonferenza: i segmenti OA OB.... diconsi **raggi** della circonferenza stessa.

Lo strumento col quale comunemente si descrive la circonferenza è il *compasso*: fatto centro in O con quella delle punte alla quale non sia infissa la matita, la punta scrivente o mobile descrive la circonferenza.

La circonferenza è una linea *chiusa*, come è chiuso il fascio di raggi.

Il segmento AB di retta che unisce i due punti A e B della circonferenza chiamasi **corda.**

Ogni corda che contiene il centro dicesi **diametro.**

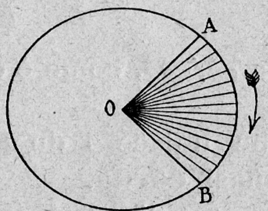
45. Una parte di circonferenza limitata a due punti A e B dicesi **arco:** e i punti A e B diconsi *estremi* dell' arco. Si dice che la corda AB è *sottesa* dall' arco AB. Se gli estremi dell' arco AB sono gli estremi anche di un diametro, l' arco dicesi allora **semicirconferenza.**

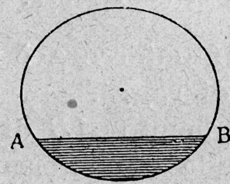
46. Ogni punto del piano, che non sia sulla circonferenza, congiunto col centro O dà o un segmento minore del raggio o un segmento maggiore. Nel primo caso il punto dicesi **interno**; nel secondo, **esterno** alla circonferenza.

Dicesi **cerchio** la parte del piano costituita dai punti della circonferenza e dai punti interni alla circonferenza.

Col vocabolo **circolo** si intende nella pratica tanto la circonferenza quanto il cerchio; ma non vi è per questo pericolo di equivoco sapendo tutti che l'una è una linea e l'altro è una superficie, e che dal contesto del discorso apparirà subito quale delle due cose si intende di chiamare col vocabolo circolo.

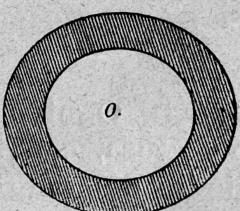
47. La parte di cerchio limitata da due raggi OA e OB e dall' arco AB che essi determinano in un dato verso, dicesi **settore circolare**. Se l'angolo OAB



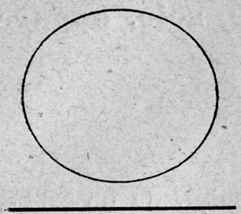


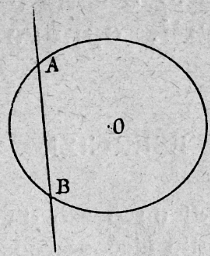
dei due raggi è retto, il settore dicesi **quadrante**; e se è un angolo piatto, **semicerchio**. Una parte di cerchio compresa fra un arco e la corda che ne congiunge gli estremi si dice **segmento** circolare.

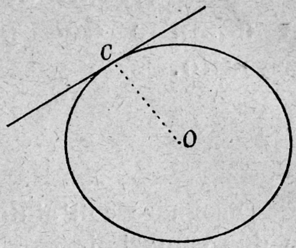
Due circoli **concentrici**, cioè che hanno lo stesso centro, e con raggi differenti determinano una superficie piana che dicesi **corona circolare**.



48. Una retta e un circolo che giacciono in uno stesso piano possono avere due punti distinti A e B in comune, oppure uno solo, o nessuno. Nel primo caso la retta si dice **tutta esterna** al circolo, nel secondo **tangente**, e nel terzo caso **secante** del circolo stesso.

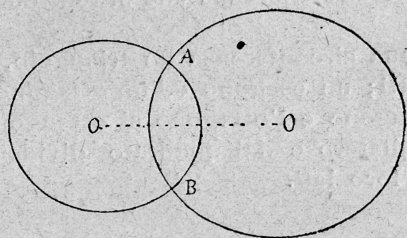


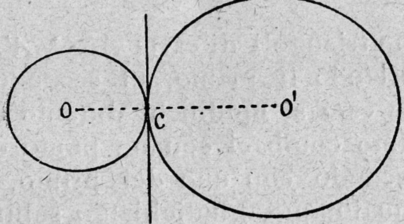


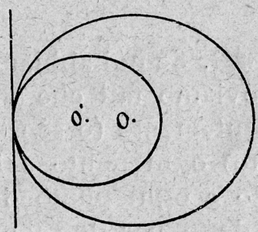


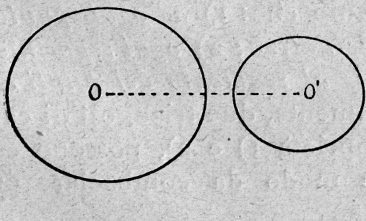
Si verifica con tutta facilità, con una buona squadretta, che:

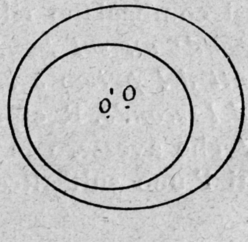
Il raggio OC del circolo è perpendicolare alla tangente nel punto di contatto C.











Due circoli di uno stesso piano possono avere in comune due punti, oppure uno solo, oppure nessuno.

ESERCIZI.

Disegnare coll'aiuto di un pezzo da due soldi, da un soldo, da due centesimi . . . . delle circonferenze, indi a mano libera segnare il centro.

Disegnare a mano libera delle circonferenze a tratto continuo; a tratti; a punti.

Segnare sopra una circonferenza un raggio, un diametro, una corda; due archi eguali, un quadrante.

Disegnare due circonferenze che si tocchino internamente od esternamente.

Segnare in una circonferenza un triangolo, un quadrato, un pentagono inscritti; un esagono ed un ottagono regolari, tenendo presente che l'esagono e l'ottagono si ottengono rispettivamente dal triangolo equilatero e dal quadrato dividendo per metà gli archi sottesi dai loro lati.

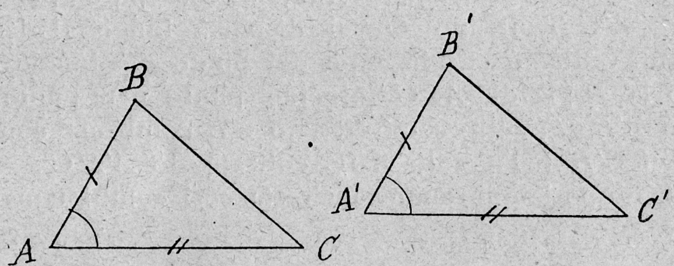
Triangoli eguali.

49. Se noi abbiamo due triangoli di carta ABC, $A'B'C'$ e li troviamo tali che trasportando il primo sul secondo convenientemente (e senza che esso si modifichi durante il trasporto) ogni punto del primo combaci con un punto del secondo e ogni punto del secondo con uno del primo, come si è detto per due figure qualunque, giudichiamo subito che i due **triangoli** sono **fra loro eguali.** Però nel momento in cui essi combaciano rileviamo che: 1) *ad ogni punto dell'uno corrisponde un sol punto dell'altro;* 2) *ogni segmento formato da punti del primo è eguale al segmento dei punti corrispondenti del secondo.* Reciprocamente, due triangoli di carta ABC, $A'B'C'$ che avessero le proprietà 1) e 2), possono essere trasportati l'uno sull'altro in modo da combaciare punto per punto.

Ora noi faremo vedere che per decidere se due triangoli sono fra loro eguali non è necessario verificare che trasportandoli l'uno sull'altro, combaciano punto per punto, oppure verificare che essi abbiano le proprietà 1) e 2); ma che è sufficiente sapere che alcuni elementi del primo triangolo sono eguali ad alcuni del secondo per poter esser certi della loro completa eguaglianza. Ad es.:

1) **Due triangoli i quali hanno due lati dell'uno eguali rispettivamente a due lati dell'altro e l'angolo da essi compreso pure eguale, hanno eguali fra loro gli altri elementi, e sono fra di loro eguali.**

Siano ABC e $A'B'C'$ due triangoli, i quali abbiano eguali i lati AB e $A'B'$, eguali i lati AC e $A'C'$, ed eguali gli angoli BAC e $B'A'C'$; dico che devono essere fra loro eguali. Per riconoscere vera questa proprietà ricalchiamo il tri-



angolo ABC e poi trasportiamo la copia di ABC sul triangolo $A'B'C'$ in modo che l'angolo BAC combaci col suo eguale $B'A'C'$; allora troveremo che il segmento AB *dovrà* combaciare col suo eguale $A'B'$ e AC con $A'C'$; di più l'angolo ABC *dovrà* combaciare coll'angolo $A'B'C'$, e così dicasi degli angoli ACB, $A'C'B'$.

Constatato che il triangolo $A'B'C'$ deve combaciare colla copia del triangolo ABC è verificata anche la proposizione enunciata, cioè, è verificato che anche $BC \equiv B'C'$, che l'angolo $ABC \equiv A'B'C'$, che $BCA \equiv C'B'A'$ e che i due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono eguali.

2) **Due triangoli i quali hanno due angoli dell'uno rispettivamente eguali a due angoli dell'altro, e il lato da essi compreso eguale, hanno fra loro eguali gli altri elementi, e sono fra loro eguali.**

Nella fig. prec. si supponga che sia l'angolo $BAC \equiv B'A'C'$ $AC \equiv A'C'$ e l'angolo: $ACB \equiv A'C'B'$; dico che i due triangoli sono fra loro eguali e che $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ e ancora che l'angolo: $ABC \equiv A'B'C'$.

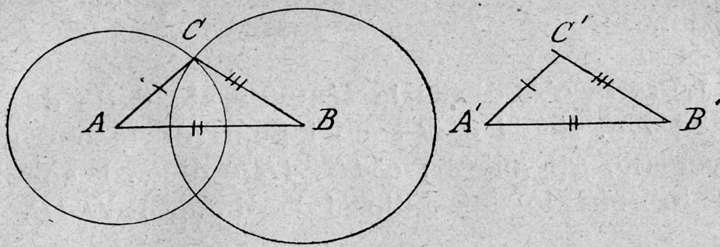
La verificazione si fa come pel caso precedente. Fatta la copia del triangolo ABC si trasporti questa sul triangolo $A'B'C'$ in modo che la copia di AC combaci col segmento ad essa eguale $A'C'$, indi si faccia girare la copia di ABC attorno ad $A'C'$ in modo che essa venga a portarsi sulla parte di piano ove si trova il triangolo $A'B'C'$. Per essere l'angolo: $BAC \equiv B'A'C'$, siamo certi che il lato AB prenderà la direzione del lato $A'B'$, e così pure per essere: $ACB \equiv A'C'B'$ il lato CB si disporrà lungo il lato $C'B'$. Così noi vediamo che la copia del punto B coincide con B'; perciò la copia di ABC coincide punto per punto col triangolo $A'B'C'$; oltre a ciò il lato AB combacia con $A'B'$ e CB con $C'B'$ e l'angolo ABC coll'angolo $A'B'C'$.

La proposizione enunciata resta così completamente verificata.

3) **Due triangoli i quali hanno i tre lati rispettivamente eguali sono fra loro eguali, ed hanno gli angoli ordinatamente eguali.**

Siano ABC, $A'B'C'$ i due triangoli dati e si sappia che: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $BC \equiv B'C'$; dico che i due triangoli sono eguali.

A tale scopo descriviamo dapprima, nella parte di piano ove giace il triangole ABC, e con l'aiuto del compasso, due circoli, uno di centro A e raggio AC, l'altro di centro di B e raggio BC; così il vertice C del triangolo ABC viene ad essere uno dei punti di incontro dei due circoli così costruiti



(l'altro come sappiamo è dalla banda opposta di C rispetto ad AB). Fatta sopra una carta da lucidi la copia della figura così ottenuta, composta cioè di ABC e dei due circoli anzidetti, imaginiamo di trasportar questa copia sulla parte di piano ove giace il triangolo $A'B'C'$ in modo che AB, combaci con $A'B'$, eguale per ipotesi ad AB, e che il triangolo ABC venga a posare dalla parte ove giace il triangolo $A'B'C'$. Ciò posto egli è evidente che per essere $A'C'$ eguale ad AC il punto C dovrà trovarsi sopra la circonferenza di centro A e raggio AB della nostra copia; e per essere $C'B'$ eguale a CB, il punto C medesimo dovrà trovarsi anche sulla seconda circonferenza, quella cioè di centro B e raggio CB. Adunque il punto C' dovendo trovarsi sull'una e sull'altra delle due circonferenze da noi descritte, dovrà combaciare con uno dei due punti di incontro di esse, e nel caso nostro dovrá combaciare con C. Segue da ciò che i due triangoli ABC ed $A'B'C'$ possono essere trasportati l'uno sull' altro in modo che i vertici A,B,C coincidano rispettivamente coi vertici A',B',C'; essi sono dunque fra loro eguali.

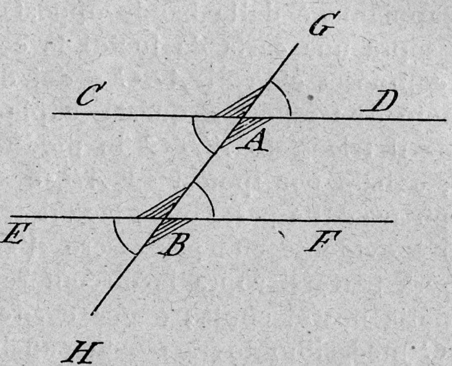
Osserv. Le proposizioni 1) 2) e 3), ora esposte e chiarite, sono conosciute sotto il nome di: **casi** (cioè condizioni sufficienti) **di eguaglianza di due triangoli.**

Angoli di rette parallele con una loro trasversale

50. In un piano due rette CD ed EF intersecate da una terza GH formano otto angoli, i quali considerati

a coppie, assumono nomi speciali, a seconda della loro posizione.

La retta *GH* dicesi la **trasversale** delle due rette *CD* ed *EF*. Se *A* e *B* sono i punti di incontro della trasversale, gli angoli: *CAB ABF* diconsi angoli **alterni interni**; lo stesso dicasi degli angoli *DAB, ABE*

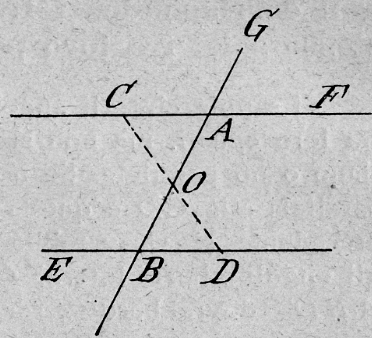


Gli angoli: *GAD, ABF* diconsi angoli **corrispondenti**; lo stesso dicesi degli angoli *DAB, FBH*; degli angoli *GAC, ABE*. e degli angoli *CAB, EBH*. Gli angoli *DAB, ABF* diconsi angoli **interni dalla stessa parte** o semplicemente **interni**; lo stesso dicasi degli angoli *CAB, ABE*.

Due rette parallele formano con una qualsivoglia loro trasversale angoli alterni interni eguali fra loro, ed angoli corrispondenti eguali pure fra loro.

Siano *CF, ED* due parallele incontrate dalla trasversale *GH* nei punti *A* e *B*; sia *O* il punto medio del segmento

AB, e si faccia passare per *O* un altro segmento qualsiasi *CD*. Ricordiamo che per essere *CF*, *ED* rette parallele, *CF* è la figura opposta ad *ED* rispetto al punto *O* di mezzo del segmento trasversale *AB*, sicchè: $AO \equiv OB, CO \equiv OD$. Ma i due triangoli *CAO* *DBO* avendo due lati dell'uno *OA*, *OC*, rispettivamente eguali a due lati dell'altro, *OB*, *OD* e l'angolo da essi compreso eguale perchè opposto al vertice, sono eguali. Ne risulta che i due angoli *CAO*, *DBO* sono fra loro eguali, ma questi sono alterni interni; dunque ecc.



Siccome poi: $GAF \equiv CAO$ come angoli opposti al vertice, così ne viene che anche i due angoli *GAF* e *DBO* sono fra loro eguali; ma questi sono angoli corrispondenti; dunque ecc.

Oss. Quando una proposizione può essere dedotta, come in questo caso, con ragionamento da precedenti proposizioni, senza ricorrere a verificazioni materiali od alla osservazione, allora si dice che la proposizione *può esser dimostrata*, e la proposizione stessa dicesi **teorema.**

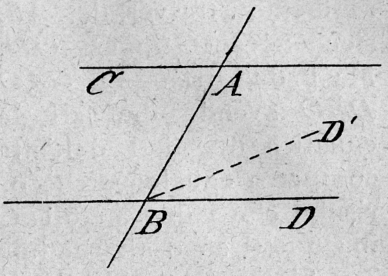
In queste nozioni, come abbiamo avvertito, noi facciamo uso preferibilmente del metodo che consiste nel verificare le proposizioni sperimentalmente sia con l' osservazione diretta, che mediante opportune e semplici operazioni, supponendo sempre, ben inteso, in questo metodo, che un corpo trasportandosi nello spazio, possa mantenersi inalterato. Questo è il metodo di osservazione e di esperienza, o **metodo sperimentale.** Quello invece che deduce col solo ragionamento una proposizione da altre (anche se già verificate o verificabili col primo metodo) dicesi **metodo razionale.**

Si può anche provare che:

51. Se due rette formano con una loro trasversale angoli alterni interni fra loro eguali, oppure an-

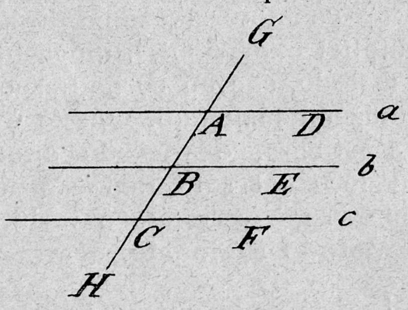
goli corrispondenti fra loro eguali, le due rette stesse sono fra loro parallele.

Si sappia che gli angoli alterni interni *CAB*, *ABD* sono fra loro eguali, ma non si sappia se le due rette *CA*, *BD* siano o no parallele. Se noi conducessimo dal punto *B* la parallela alla *CD* e questa fosse la *BD'*, per la proposizione precedente si ricaverebbe che gli angoli alterni interni *CAB*, *ABD'* dovrebbero esser fra loro eguali; ma per ipotesi *CAB*, *ABD* sono eguali: adunque dovrebbero esser fra loro eguali gli angoli *ABD'* e *ABD*, ciò che non può essere se non quando la parallela *BD'* coincide con la retta *BD*. Adunque dal supporre eguali gli angoli alterni interni noi abbiamo ricavato col ragionamento che le rette *BD* e *CA* devono essere parallele. In modo analogo si prova che se gli angoli corrispondenti sono eguali le rette *CA*, *BD* sono ancora parallele.



Due rette parallele ad una medesima retta sono parallele fra loro.

Siano date nel piano del nostro disegno tre rette *a b c*, e si sappia che *a* è parallela alla *c* e che *b* è parallela alla *c*; proveremo che *a* e *b* sono fra loro parallele. Infatti se noi le tagliamo tutte e tre con una trasversale *GH* troviamo che l'angolo $GAD \equiv GCF$ perchè angoli corrispondenti delle parallele *a* e *c*; che $GBE \equiv GCF$ perchè corrispondenti delle parallele *b* e *c*; perciò $GAD \equiv GBE$; e siccome questi angoli *GAD*, *GBE* sono angoli corrispondenti eguali fatti dalle rette *a*, *b* con la

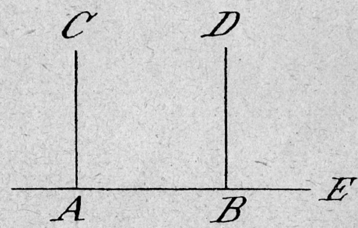


trasversale GH, così ne deduciamo che le rette a e b sono fra loro parallele.

Vogliamo ancora provare che:

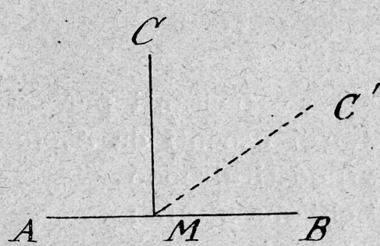
Due rette del piano perpendicolari ad una medesima retta di esso sono fra loro parallele.

Se la retta CA è perpendicolare alle AE nel punto A, l'angolo EAC è retto; per la stessa ragione è retto l'angolo EBD se la retta DB è essa pure perpendicolare alla AE. Allora gli angoli EAC, EBD sono eguali fra loro perchè retti; ma essi sono anche angoli corrispondenti; dunque le rette CA, DB sono fra loro parallele.



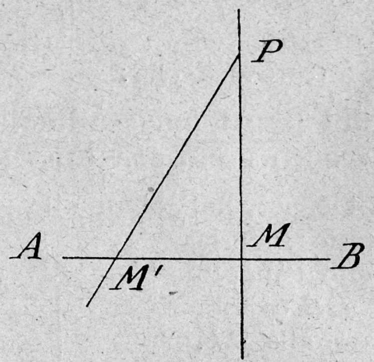
Per un punto del piano non si può condurre più di una perpendicolare ad una data retta del piano stesso.

Se il punto dato M è sulla retta data AB, sappiamo che vi è una sola retta MC che forma con la retta AB due an-



goli adiacenti eguali, perchè ogni altra retta MC' dovendo essere compresa nell'angolo CMB oppure nell'angolo CMA forma con MB o con MA un angolo minore di un retto.

Se il punto dato è un punto P fuori della retta AB la perpendicolare condotta da P alla AB non può essere che una sola, altrimenti (se fossero due, PM PM') si potrebbe



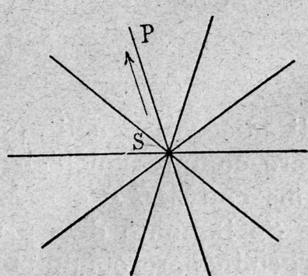
dire che gli angoli corrispondenti, PMB, $PM'B$ sarebbero eguali come retti e quindi che le rette PM, PM' sarebbero parallele, contro il fatto che passano entrambe per il punto P.

Eserc. Si dimostri con l'aiuto della proposizione al n. 26 che due segmenti paralleli compresi fra rette parallele sono eguali ossia: I lati paralleli di un parallelogramma sono eguali fra loro.

CAPITOLO II.°

Rette e piani perpendicolari fra loro.

52. Tutte le rette passanti per un punto S dello spazio o tutti i raggi uscenti da S, (come se S fosse un punto luminoso) costituiscono una figura che si chiama **stella**; e il punto S dicesi il **centro** della stella.



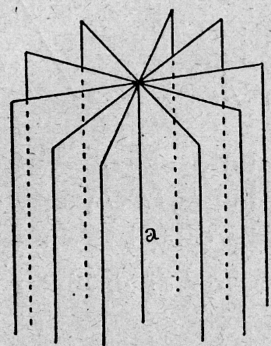
Per ogni punto P dello spazio passa una retta o un raggio della stella.

Fascio di raggi e stella di raggi

non sono la stessa figura. Nel fascio i raggi sono situati tutti in uno stesso piano, e nella stella no.

53. Un piano viene diviso da una sua retta, prolungata nelle sue direzioni, in due parti che si chiamano **semipiani.**

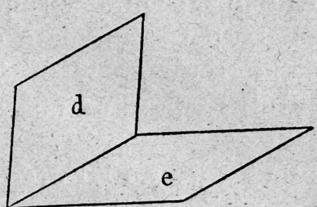
Tutti i piani che passano per una retta *a,* o tutti i semipiani limitati alla retta *a,* costituiscono una fi-



gura che dicesi **fascio di piani** o di **semipiani.** La retta *a* dicesi **asse** del fascio.

Le successive posizioni di una porta che ruota attorno ai suoi cardini ci forniscono un esempio di un fascio di semipiani di cui l'asse è la retta che congiunge i cardini.

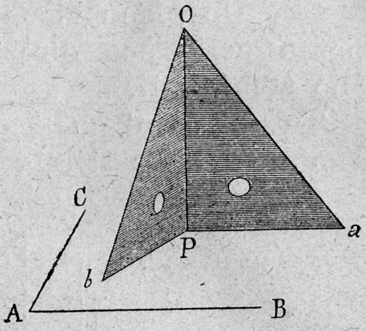
La parte del fascio di piani determinata da due semipiani chiamasi *angoloide diedro* o, semplicemente, **diedro.**



Un foglio di carta piegata in due, debitamente completato di altri fogli, ci suggerisce l'idea di un angoloide diedro.

54. Se sopra di un piano *ABC* si appoggiano i cateti di due squadre in modo che i vertici dei loro angoli retti

coincidano con un punto P del piano e gli altri due cateti combacino nella retta PO, la retta PO viene ad essere perpendicolare a due rette del piano ABC; e quando facciamo girare una delle squadrette attorno a tal retta PO, vediamo che l'altro cateto della squadretta si mantiene sempre sul piano, così che si può anche dire che la retta PO è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per P.



Una retta OP dello spazio che sia perpendicolare a due rette di un piano ABC passanti per il suo punto P d'incontro col piano dicesi **perpendicolare al piano.**

Ad esempio lo spigolo di un dado è perpendicolare alla base di esso.

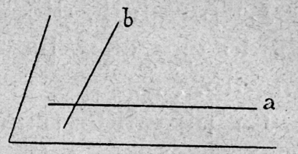
Il segmento OP della retta perpendicolare in P al piano dato, condotto da O dicesi **segmento normale** o **distanza del punto O dal piano.** Ogni altro segmento OA condotto da O ad un altro punto A del piano dicesi **obliquo.** Dalla costruzione precedente si ha che: **Per un dato punto si può condurre una sola perpendicolare ad un piano.**

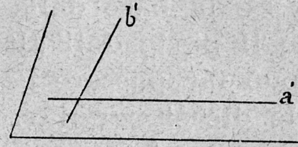
Un piano, che abbia la giacitura di uno specchio d'acqua stagnante dicesi **piano orizzontale.** E la perpendicolare ad un piano orizzontale dicesi **verticale.** Le rette di un piano orizzontale diconsi pure **rette orizzontali.**

55. Due piani, che incontrandosi formano i *diedri* tutti e quattro eguali fra loro, diconsi piani **perpendicolari** l'uno all'altro.

Ad es. due pareti consecutive di una stanza, una parete e il suolo sono fra loro perpendicolari.

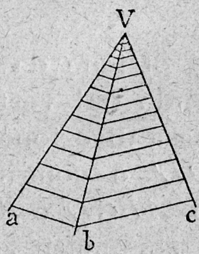
56. Una retta *a* e un piano *a'b'* diconsi fra loro **paralleli** se la retta *a* è parallela ad una retta *a'* del piano.





57. Due piani *ab* ed *a'b'* si dicono **paralleli** se le rette dell'uno sono parallelè all'altro.

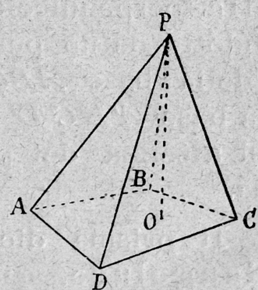
Ad es. tutte le pagine di un libro chiuso sono parallele fra di loro.



58. Tre raggi *abc* uscenti da un punto *V*, e non situati in un piano, determinano una figura che chiamasi **triedro**; il punto *V* è detto il **vertice**; gli angoli *ab, bc, ca* le **faccie**; e i diedri formati dalle faccie, i **diedri** del triedro.

Poliedri.

59. Dicesi **piramide** la figura che si ottiene da un poligono piano, ad es. *ABCD*, e un punto *P* fuori di esso, unendo il punto *P* coi vertici del poligono stesso. Il poligono *ABCD* dicesi la **base** della piramide e il punto *P* il **vertice**. I triangoli *PAB, PBC, PCD, PDA* sono le **faccie** laterali della piramide e ne costituiscono la **superficie laterale.**



Il segmento *PO* uscente dal vertice e perpendicolare al piano della base dicesi **altezza** della piramide.

La piramide dicesi **triangolare, quadrangolare....** secondo che essa ha per base un triangolo, un quadrangolo. . . .

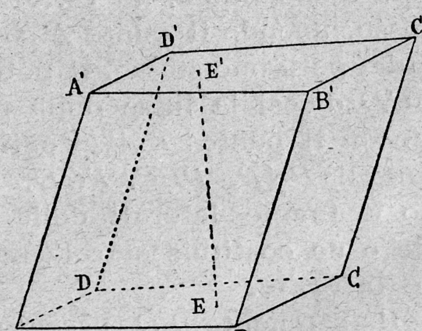
La piramide triangolare dicesi anche **tetraedro**.

Se la base della piramide è un poligono regolare e se il piede dell' altezza è il centro del circolo che si può far passare per i vertici del poligono, la piramide dicesi **regolare**.

La piramide è dunque una figura chiusa da poligoni piani i quali sono tutti triangoli, tranne uno, cioè la base, la quale può essere un poligono qualsiasi.

60. Dicesi **prisma** la figura che si ottiene da un poligono piano, ad es. $ABCD$, conducendo dai vertici di esso dei segmenti paralleli nella stessa direzione e tutti eguali fra loro AA', BB', CC', DD' e congiungendo i punti $A'B'C'D'$. I due poligoni $ABCD$ e $A'B'C'D'$ si dicono le **basi** del prisma; i segmenti AA' BB', CC', DD', gli **spigoli laterali,** e i parallelogrammi $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CDC'D'$, $DAD'A'$ diconsi le **faccie laterali** del prisma, e ne costituiscono la **superficie laterale**.

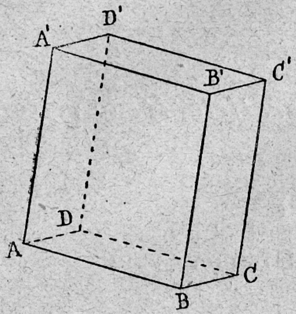
Il segmento EE' della perpendicolare condotta da un punto E della base $ABCD$ alla base $A'B'C'D'$ dicesi **altezza** del prisma.



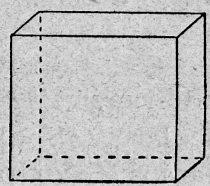
Il prisma dicesi **triangolare, quadrangolare...**, secondo che la base è un triangolo, un quadrangolo..., ecc.

I piani che uniscono due spigoli paralleli non consecutivi del prisma diconsi **piani diagonali** del prisma.

Il prisma è dunque una figura chiusa da poligoni piani, i quali sono tutti parallelogrammi, eccettuati due soli, cioè le basi, le quali possono essere due poligoni qualunque, ma però eguali e paralleli.



61. Se la base del prisma è un parallelogramma, il prisma stesso dicesi **parallelopipedo**. Se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi il parallelopipedo dicesi **retto**. E se inoltre tutta le faccie sono dei rettangoli il parallelopipedo dicesi **parallelopipedo rettangolo**.



E quel parallelopipedo in cui tutte le faccie sono dei quadrati dicesi **cubo**.

62. La piramide, il prisma e quindi anche il parallelopipedo e il cubo.... diconsi complessivamente **poliedri**.

Però altre figure portano questo nome. Così ad es. abbiamo un poliedro se poniamo sopra di un prisma di legno una piramide o un cubo, od un altro prisma di legno.

I segmenti che uniscono il vertice della piramide coi punti interni della base, costituiscono nel loro insieme la **parte interna** della piramide: così pure i segmenti che uniscono i punti interni delle due basi di un prisma, costituiscono la **parte interna** del prisma.

Se le basi sono poligoni convessi, coi vocaboli piramide e prisma si intendono tanto le superficie, quanto i solidi da essi determinati.

Riepilogando abbiamo:

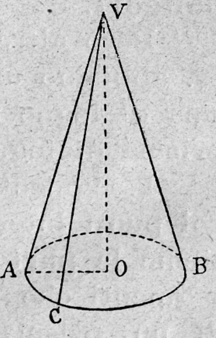
il *poliedro generico;*
il *poliedro piramide* o semplicemente la *piramide;*
il *poliedro prisma* o semplicemente il *prisma.*

E fra i prismi abbiamo:

il *parallelopipedo generico;*
il *parallelopipedo retto, e il parallelopipedo rettangolare;*
il *cubo.*

Cono - Cilindro - Sfera.

63. Considеriamo una circonferenza di centro *O* e di raggio *OA,* e dal centro conduciamo la perpendicolare *OV* al piano del circolo stesso, indi congiungiamo *V* coi punti *ABC*... della circonferenza: la figura che ne risulta chiamasi **cono**. Il punto *V* ne è il **vertice**, il circolo di centro *O* e raggio *OA* la **base,** e *VO* l'**altezza**; ogni segmento poi, come ad es. *VA*, dicesi **lato** del cono, od anche *retta generatrice* del cono.



L'insieme delle generatrici del cono dicesi **superficie laterale** del cono stesso.

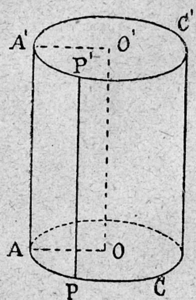
La **superficie totale** del cono è l'insieme della superficie laterale con la base.

Si ha un cono ogni qualvolta si fa ruotare un triangolo rettangolo *AOV* attorno ad un suo cateto

64. Consideriamo ancora la circonferenza di cen-

tro O e di raggio OA, e dai suoi punti P.... conduciamo delle rette PP',... perpendicolari al piano del circolo e sempre eguali allo stesso segmento; si ottiene una figura che si chiama **cilindro**. I punti P' sono situati in un altro circolo di centro O'.

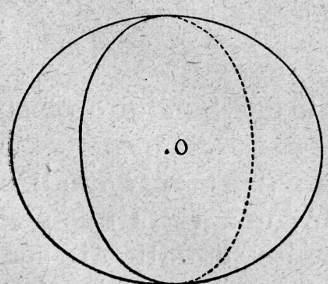
I due circoli di centri O, O' si dicono le **basi** del cilindro; la retta OO' dicesi **asse** e le rette PP',...... che congiungono i punti delle due circonferenze e sono perpendicolari alle basi diconsi i **lati** o le **generatrici** del cilindro medesimo, e ne costituiscono la **superficie laterale**. La **superficie totale** del cilindro è l'insieme della superficie laterale con le due basi.



Si ha un cilindro ogniqualvolta si fa ruotare un rettangolo $OPP'O'$ attorno ad un suo lato OO'; si riconosce che durante questa rotazione il punto P' descrive un circolo di raggio eguale a quello descritto da P.

65. Tutti i punti ABC... dello spazio equidistanti da un punto O, costituiscono una figura che dicesi **sfera**. Il punto O dicesi il **centro**, e ogni segmento come OA, **raggio** della sfera.

Si ha la sfera ogniqualvolta si fa ruotare una semicirconferenza attorno al suo diametro.



Corda della sfera dicesi ogni segmento che unisce due punti della sfera. **Diametro** è una corda che passa pel centro. **Piano diametrale** è ogni piano passante pel centro. I circoli della sfera situati nei piani diametrali sono tutti fra loro eguali, e si chiamano **cir-**

coli massimi. Ogni piano diametrale divide la sfera in due parti eguali, che si chiamano **emisferi.**

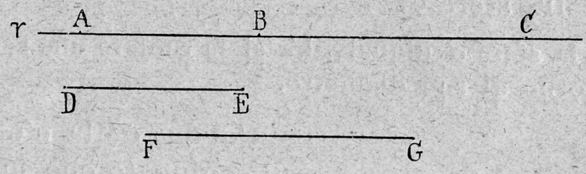
Coi vocaboli cono, cilindro, sfera, si intendono rispettivamente tanto le superficie, quanto i solidi da esse determinati.

ESERCIZI.

Disegnare a mano libera la rappresentazione:
- di un triedro;
- di una piramide;
- di un prisma;
- di un parallelopipedo;
- di un cono;
- di un cilindro;
- di una sfera, in guisa che appaiano rilevati.

Addizione e sottrazione di segmenti.

66. Diciamo **consecutivi** due segmenti della stessa retta come *AB* e *BC*, se essi hanno un estremo in



comune *B* e gli altri due estremi da bande opposte rispetto a *B*.

Addizionare o sommare due segmenti quali si vogliano vuol dire disegnare sopra una retta due segmenti consecutivi e rispettivamente eguali ai segmenti dati.

Il segmento compreso fra i due estremi non comuni dei due segmenti consecutivi dicesi la **somma** dei due segmenti dati; e questi ne sono le **parti** o gli **addendi.**

Nella figura qui sopra i segmenti AB e BC sono consecutivi, e l'uno è eguale al segmento DE e l'altro al segmento FG: il segmento AC che così si ottiene è la somma dei segmenti DE, FG.

Per esprimere che AC è la somma di AB e BC si scrive $AC = AB + BC$ e si legge: *AC è eguale ad AB più BC*, oppure: *AC è eguale a DE più FG.*

Se poi sono dati più di due segmenti da addizionare, basta fare la somma dei primi due, poi la somma del segmento così ottenuto col terzo, . . . e così di seguito.

Riportando sopra una lista di carta i segmenti AB e BC, si verifica facilmente che;

La somma dei segmenti non cambia mutando l' ordine degli addendi.

67. Se si sommano due, tre, quattro... segmenti eguali ad AB, i segmenti che ne risultano si dicono rispettivamente: **doppio, triplo, quadruplo, . . . di AB**, od ancora si dicono **multipli di AB secondo i numeri 2, 3, 4 . . .** rispettivamente.

Un multiplo di AB dinotasi brevemente scrivendo a fianco di AB (a destra oppure a sinistra) un numero intero. Ad es. con: $(AB)5$, oppure con: $5(AB)$ indicasi il quintuplo di AB. Abbiamo dunque:

$$2\,(AB) = AB + AB$$
$$3\,(AB) = AB + AB + AB$$
$$4\,(AB) = AB + AB + AB + AB$$

. . . .

Se un segmento AB è doppio, triplo, quadruplo, . . .

di CD, si dice che CD è rispettivamente **metà, terza parte,** (un terzo) **quarta parte,** (un quarto) .... di AB od ancora si dice che CD è **parte aliquota,** o **sottomultiplo di AB secondo i numeri 2, 3, 4** . . . rispettivamente.

Un sottomultiplo di AB dinotasi brevemente sia scrivendo sotto AB un breve tratto seguito da un numero intero, come pure scrivendo a fianco di AB una frazione ordinaria col numeratore 1 e con un intero maggior di 1 per denominatore.

Ad es. tanto con: $\frac{(AB)}{5}$, come con: $\frac{1}{5}(AB)$, come pure con: $(AB)\frac{1}{5}$ indicasi la quinta parte di AB. Abbiamo quindi:

$$\frac{1}{2}(AB) + \frac{1}{2}(AB) = AB$$

$$\frac{1}{3}(AB) + \frac{1}{3}(AB) + \frac{1}{3}(AB) = AB$$

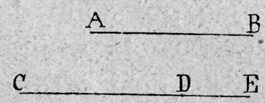
$$\frac{1}{4}(AB) + \frac{1}{4}(AB) + \frac{1}{4}(AB) + \frac{1}{4}(AB) = AB$$

. . . .

Quando poi scriviamo ad es. $(AB)\frac{3}{5}$ oppure $\frac{(AB)\,3}{5}$ intendiamo sempre di indicare la somma di tre segmenti eguali ad un quinto di (AB); similmente, quando scriviamo $(AB)\frac{5}{4}$ intendiamo di indicare la somma di cinque segmenti eguali ad un quarto di AB; e così via.

68. Segniamo due segmenti diseguali AB e CE, il primo minore del secondo, e sul maggiore CE se-

gniamo una parte *CD* eguale ad *AB*. Il segmento *ED*, che così risulta, si dice la **differenza** dei segmenti dati *CE* e *AB*.



Per esprimere che *ED* è la differenza fra *CE* ed *AB* si scrive: $ED = CE - AB$, e si legge: *ED* è eguale a *CE meno AB*.

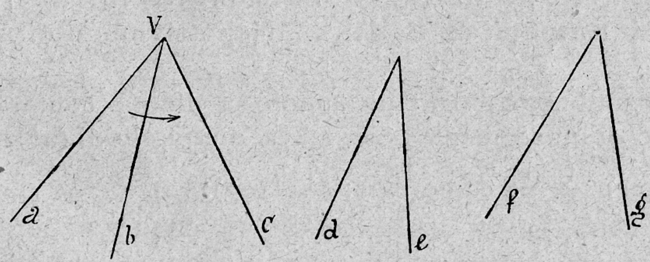
E l'operazione con la quale si ottiene la differenza di due segmenti, il primo maggiore del secondo, dicesi **sottrazione.** È da notare che:

Se si addiziona la differenza di due segmenti col segmento minore si ottiene il maggiore.

Addizione e sottrazione di angoli.

69. Diciamo **consecutivi** due angoli di uno stesso piano, come *(ab)* e *(bc)*, se essi hanno il vertice *V* ed un lato *b* in comune, e gli altri due lati da bande opposte di *b*.

Addizionare o sommare due angoli quali si vogliano vuol dire disegnare sopra un piano due angoli consecutivi e rispettivamente eguali agli angoli dati.



Nella figura qui sopra gli angoli (*ab*) e (*bc*) sono consecutivi, e l'uno è eguale all'angolo (*de*) e l'altro all'angolo (*fg*).

L' angolo *(ac)* dicesi **somma** dei due angoli dati; e questi le **parti** o **addendi** della somma.

Se poi sono dati più di due angoli da addizionare, basta fare la somma dei primi due, poi la somma dell'angolo così ottenuto col terzo . . . . e così di seguito.

Se sopra un foglio di carta ricalchiamo gli angoli *(ab)* e *(bc)*, ... verificheremo facilmente che:

La somma degli angoli non cambia mutando l'ordine degli addendi.

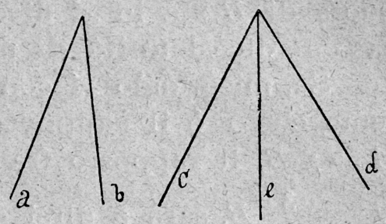
70. Sommando due, tre, quattro, ... angoli eguali ad *(ab)*, gli angoli che ne risultano si dicono rispettivamente **doppio, triplo, quadruplo,** . . . **di** *(ab)*, od ancora si dicono **multipli di** *(ab)* **secondo i numeri 2, 3, 4,** . . . . rispettivamente.

Un multiplo di (*ab*) si dinota, come pei segmenti, scrivendo a fianco di (*ab*) un numero intero. Così ad es. (*ab*)3 dinota il triplo di (*ab*).

Se un angolo *(ab)* è doppio, triplo, quadruplo, . . . di un altro *(cd)*, questo dicesi rispettivamente **metà, terza parte, quarta parte,** . . . **di** *(ab)*, od ancora si dice che *(cd)* è **parte aliquota,** o **sottomultiplo, di** *(ab)* **secondo i numeri, 2 3 4.** . . . rispettivamente.

Un sottomultiplo di un angolo si dinota come il sottomultiplo di un segmento: così ad es. un quarto di (*ab*) si dinota tanto con: $\frac{(ab)}{4}$, come con: $\frac{1}{4}$ (*ab*).

Quando poi scriviamo ad es. (*ab*) $\frac{3}{4}$, oppure $\frac{(ab)\,3}{4}$ intendiamo, come pei segmenti, di indicare la somma di tre angoli eguali ad un quarto di (*ab*).



71. Segniamo due angoli diseguali (ab) e (cd) e nell'angolo maggiore (cd) segniamo un parte (ce) eguale al minore (ab). L'angolo (ed), che così risulta, è la **differenza** degli angoli dati (cd) e (ab). E l'operazione con la quale da due angoli diseguali si ottiene la loro differenza dicesi **sottrazione**.

È qui pure da notare che:

Se si addiziona la differenza di due angoli coll'angolo minore di essi, si ottiene il maggiore.

Misura dei segmenti e degli angoli.

72. Per semplicità con due lettere maiuscole ad es. A e B indichiamo, in ciò che segue, tanto due segmenti, quanto due angoli.

73. Se A è eguale a B, è usanza dire che: B **sta una volta in** A oppure che: A **sta una volta in** B e si scrive: $A = 1\,B$, oppure: $B = 1\,A$.

E se A è ad es. quintuplo di B, si suol dire che B **sta cinque volte in** A, oppure che **la quinta parte di** A **sta una volta in** B e si scrive: $A = 5\,B$, oppure: $B = \frac{1}{5} A$.

E se A è ad es. tre quarti di B, si suol dire che **la quarta parte di** B **sta tre volte in** A, oppure che **la terza parte di** A **sta quattro volte in** B, e si scrive: $A = \frac{3}{4} B$, oppure $B = \frac{4}{3} A$.

74. Trovare quante volte B od una parte ali-

quota di B sta in A dicesi : **misurare** A **con** B. In tal caso B dicesi **unità di misura** o solamente **unità**.

Se, misurando A con B, avremo che : $A = 1\,B$, diremo che 1 è il **rapporto** fra A e B; se avremo che : $A = 5\,B$, il rapporto fra A e B è 5 ; e se avremo che :

$A = \frac{3}{4} B$, sarà a dirsi $\frac{3}{4}$ il rapporto fra A e B.

È utile poi notare qui che se il rapporto fra A e B è 1, è pure 1 il rapporto fra B ed A; se il rapporto fra A e B è 5, è invece $\frac{1}{5}$ il rapporto fra B ed A ; e infine se $\frac{3}{4}$ è il rapporto fra A e B, è $\frac{4}{3}$ quello fra B ed A

Spesso invece di dire : **rapporto fra** A e B si suol dire : **rapporto di** A **rispetto a** B od anche : **misura di** A **rispetto a** B.

Avvertenza. Può accadere che dati due segmenti (come ad es. il lato e la diagonale di un quadrato) o due angoli, A e B, nessuna parte aliquota di B, praticamente divisibile in parti eguali, stia esattamente un numero di volte in A. In tal caso si cerca di dividere B in un numero assai grande di parti uguali, cosicchè la parte aliquota C di B risulti tanto piccola, che possa essere trascurata in confronto di B, per lo scopo col quale si fa la misura di A con B ; ed allora si porta successivamente questa parte aliquota C della B su A, finchè si avrà che A è compreso fra due multipli successivi di C, come sarebbe a dire, fra 6 C e 7 C. Supponiamo che C sia un centesimo di B, di guisa che A è compreso fra $\frac{6}{100} B$, e $\frac{7}{100} B$; in tal caso diremo che $\frac{6}{100}$ è la misura di A rispetto a B **per**

difetto, e che $\frac{7}{100}$ è la misura di *A* rispetto a *B* **per eccesso**; e potremo assumere come misura di *A* rispetto a *B* sia quella per difetto che quella per eccesso, semprechè, ben inteso, l'errore sia trascurabile. Di solito si prende la prima.

75. Le linee, le superficie e i solidi si chiamano complessivamente **grandezze geometriche**.

Se *A,B,C,D...* sono tutte linee, oppure tutte superficie, oppure tutti solidi, le *A,B,C,D...* diconsi **grandezze geometriche omogenee**.

Due grandezze omogenee si comportano rispetto alla misura come due segmenti, o come due angoli.

76. Per unità di misura dei segmenti si assume nella pratica e nei paesi in cui vige il **sistema metrico decimale**, il **metro**. Il metro (m) è diviso in 10 *decimetri* (dm), in 100 *centimetri* (cm) e in 1000 *millimetri* (mm). Esso fu introdotto in Francia alla fine del secolo XVIII, ed è all' incirca la 40 milionesima parte del meridiano terrestre passante per Parigi.

Per dinotare un segmento *AB* che sia omogeneo col metro, e che contiene ad es. 10 metri, 8 decimetri, 5 centimetri e 6 millimetri, si scrive: $AB =$ m. 10,856; e stavolta si bada che il numero decimale sia scritto sempre a destra del nome dell' unità di misura.

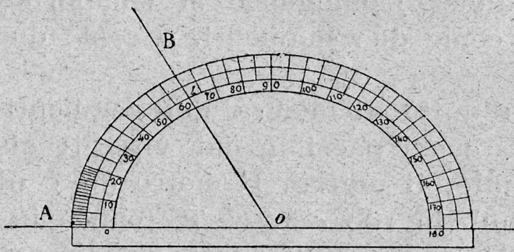
Per le grandi distanze, come quella fra due città, si usa come unità il *chilometro* (Km) che è 1000 metri, 100 decametri (Dm) e 10 ettometri (Em); in tal caso si risguarda il metro come parte aliquota.

77. Nel disegno si adopera spesso per le misure il **doppio-decimetro**. Esso è un piccolo regolo coi lati maggiori

smussati e divisi in 20 (ed in più) centimetri, ciascun dei quali è suddiviso in millimetri.

78. Per unità di misura degli angoli si assume **l'angolo retto.** Questo viene supposto diviso in 90 parti, dette *gradi;* il grado in 60 parti che si chiamano *minuti primi,* e il minuto primo in altre 60 parti che si chiamano *minuti secondi.* Un angolo (ab) che risultasse di 25 gradi, 12 minuti primi e 5 secondi, si indicherebbe così; $(ab) = 25^{\circ}, 12', 5''$.

79. Praticamente per la misura degli angoli nel disegno



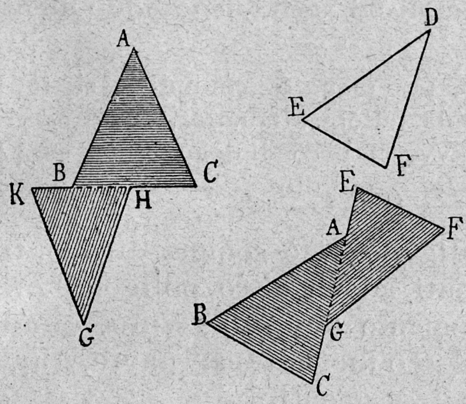
si fa uso di un istrumento detto **rapportatore.** Esso è un semicircolo inciso in una lastra trasparente od anche di metallo, l'estremo lembo del quale è diviso in 180 parti molto prossimamente eguali fra loro.

Nel centro vi è un forellino o un segno che si fa combaciare col vertice dell' angolo da misurare, mentre il diametro del rapportatore si fa combaciare con uno dei lati.

Aree.

80. Avendosi ad es. il poligono $ABKGHCA$, se noi conduciamo il segmento BH, otteniamo due triangoli ABC

HGK, i quali non hanno, oltre al segmento *BH*, alcun altro punto in comune, e che appartengono tutti e due al poligono



dato. Il poligono in tal caso dicesi **somma** dei due triangoli *ABC* ed *HGK*, e per esprimere ciò si scrive:

$$ABKGHCA = ABC + HCK.$$

Avendosi invece due triangoli *ABC*, *DEF*, se noi costruiamo, ricorrendo p. es. alla carta da lucidi, nel piano del triangolo *ABC* un altro triangolo *EGF* che sia eguale a *DEF* ma che abbia o un vertice, o un lato, o parte di un lato in comune col contorno del triangolo *ABC*, senza avere alcun altro punto comune, il poligono che ne risulta, dicesi ancora la *somma* dei due triangoli dati *ABC*, *DEF*.

Lo stesso dicasi se si avesse un triangolo e un quadrangolo, e in generale, se si avessero due poligoni qualunque

Due superficie diconsi equivalenti o si dice che **hanno aree eguali** quando le superficie sono tali che si possano scomporre in parti rispettivamente eguali, ciascuna a ciascuna.

La somma di due triangoli e quindi anche di due poligoni può ottenersi in modi diversi, disponendo diversamente

i triangoli od i poligoni stessi che la compongono; perciò, le figure che ne risultano, pur non essendo eguali, (nel senso che siano sovrapponibili o simmetriche, o nel senso che si possa stabilire fra esse una corrispondenza di eguaglianza) **hanno aree eguali** od anche **sono equivalenti**.

81. Spesso, per maggior comodità, si indicano i poligoni con una sola lettera alfabetica, come ad es.: A, B, P, Q a, b, p, q. (Si avverta però di leggere ad es. Q, q rispettivamente: Q grande, q piccolo).

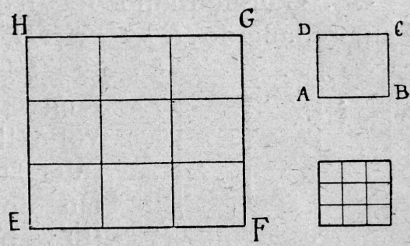
Se un poligono A è somma di due, tre, quattro... parti equivalenti ad un altro poligono B, diremo che A è rispettivamente **doppio, triplo, quadruplo,...** di B oppure che B è **metà, terza parte, quarta parte,...** di A, come pei segmenti.

Se p. es. A è triplo di B, scrivesi: $A = 3B$ oppure: $B = \frac{1}{3} A$. E se A è triplo della quarta parte di B, si scrive $A = \frac{3}{4} B$ oppure $B = \frac{4}{3} A$, come pei segmenti.

La misura di una superficie rispetto ad un quadrato q dicesi misura dell'area di quella superficie, o più brevemente **l' area** di quella superficie: essa è quel numero che esprime o quante volte q sta nella superficie o quante volte una parte aliquota di q sta in essa superficie. Vale per due superficie l'avvertenza di pag. 60 fatta per due segmenti.

82. Abbiasi ora un quadrato $q = ABCD$ ed un secondo quadrato $Q = EFGH$ tale che il lato di questo contenga tre volte il lato del primo. Si verifica con tutta facilità, osservando la figura, che il secondo quadrato contiene 3×3 ossia 9 volte il primo: cioè $Q = 9q$.

Se invece il lato di Q non è multiplo di quello di q ma è ad esempio $\frac{11}{3}$ del lato di q, allora si divideranno i lati di q in tre parti eguali, cosicchè q viene ad essere scomposto in 9 quadratini q', e si osserverà che, siccome ogni lato del quadrato Q contiene 11 volte il lato di q', il quadrato stesso Q conterrà 11×11 ossia 121 quadratini q'.



E siccome ognuno di questi è $\frac{1}{9}$ di q, così abbiamo che: $Q = \left(\frac{11}{3} \times \frac{11}{3} \right) q$.

Nel primo esempio in cui il lato del quadrato q sta 3 volte nel lato del quadrato Q, abbiamo che l'area di Q è data, rispetto all'unità di misura q dal numero: 3×3. Nel secondo esempio in cui la misura del lato di Q rispetto al lato di q preso come unità è $\frac{11}{3}$, si ha che l'area di Q rispetto all'unità q è data dal numero: $\frac{11}{3} \times \frac{11}{3}$.

Se non vi è alcuna parte aliquota del lato di q' che stia esattamente nel lato di Q, allora trovata che sia la misura del lato di Q rispetto al lato di q come unità col procedimento indicato al n. 74, l'area di Q rispetto a q si avrà moltiplicando per sè stessa la misura del lato di Q rispetto al lato di q.

La regola per trovare l'area del quadrato in ogni caso è la seguente:

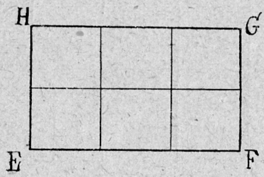
Si ha la misura dell'area di un quadrato moltiplicando la misura del suo lato per se stessa.

Più brevemente dicesi anche:

L'area del quadrato è eguale alla seconda potenza del suo lato.

Ad es. l'area del quadrato il cui lato è di m. 7 è data da: 7×7 cioè da: 49 (metri quadrati).

83. Consideriamo ora il quadrato $q = ABCD$ di prima ed un rettangolo $R = EFGH$.



Se per es. i lati EF ed EH contengono rispettivamente 3 volte e 2 volte il lato AB del quadrato q, risulta facilmente dalla figura che il rettangolo R contiene 2×3 ossia 6 volte il quadrato q; sicchè: $R = (2 \times 3)\ q$.

Se poi si avesse ad es. $EF = 4\ (AB)$ ed $EH = \frac{5}{3}\ (AB)$ allora, diviso il lato del quadrato q in tre parti eguali, e costruito il quadratino q', che è $\frac{1}{9}$ di q, si troverà che, essendo $EF = \frac{12}{3}\ (AB)$, il rettangolo R conterrà 12×5 ossia 60 volte il quadratino q', e quindi 60 volte la nona parte di q, cioè dunque: $R = \frac{60}{9} q = \left(4 \times \frac{5}{3}\right) q$.

E se si avesse ad es. $EF = \frac{4}{3}\ (AB)$ ed $EH = \frac{7}{3}\ (AB)$ allora il rettangolo R conterrebbe 28 volte il quadratino q'; cioè $R = \left(\frac{4}{3} \times \frac{7}{3}\right) q$.

Supponiamo ora che si abbia: $EF = \frac{5}{2}\ (AB)$ ed $EH = \frac{7}{3}\ (AB)$; in tal caso si dividerà il lato di q in 2×3 ossia in 6 parti eguali e indicando con q'' il quadratino che ha per lato una di queste parti, si avrà che q contiene 36 quadratini q'', che $EF = \frac{15}{6}\ (AB)$ ed $EH = \frac{14}{6}\ (AB)$ o che il rettangolo R contiene 15×14 volte il quadratino q'', cioè $\frac{1}{36}$ di q, sicchè: $R = (15 \times 14) \frac{q}{36}$, ossia $R = \left(\frac{5}{2} \times \frac{7}{3}\right) q$.

Quanto poi al caso in cui EF ed EH non contengano esattamente una parte aliquota, per quanto piccola sia, del lato AB del quadrato q, si procederà per via approssimativa, come nel caso precedentemente considerato.

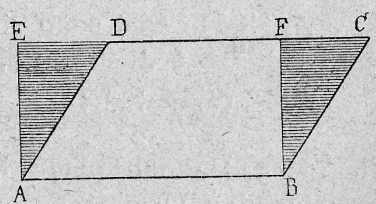
La regola per ottenere in ogni caso la misura dell'area di un rettangolo rispetto ad un quadrato q preso come unità è la seguente:

Si ha la misura dell' area di un rettangolo moltiplicando la misura della sua base per la misura della sua altezza; o più brevemente:

L' area del rettangolo è eguale al prodotto della base per l' altezza.

Es. Se la base è di m. 31 e l'altezza è di m. 17, l'area del rettangolo sarà data da: 31 × 17 cioè da: 527 (metri quadrati).

84. Sia $ABCD$ un parallelogramma, e pei vertici A e B della base si conducano le altezze AE, BF.



I due triangoli AED, BFC sono, come facilmente si dimostra, o anche si verifica con la carta da lucidi, eguali fra loro; perciò il parallelogramma $ABCD$ ed il rettangolo $ABFE$, come somme di parti rispettivamente eguali, sono equivalenti, cioè hanno aree eguali. Di qui la regola:

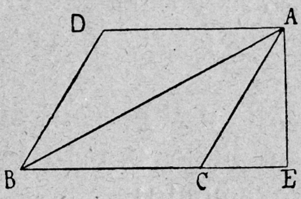
La misura dell' area del parallelogramma è eguale al prodotto della misura della base per la misura dell'altezza corrispondente a questa; o più brevemente:

L'area del parallelogramma è eguale al prodotto della base per l' altezza.

Es. Se la base è di m. 1,57 e l'altezza di m. 3,08, l'area del parallelogramma è data da: 1,57 × 3,08 cioè da: 4,8356

(leggi: 4 metriquadrati 83 decimetriquadrati e 56 centimetriquadrati).

85. Dato un triangolo ABC, si costruisca il parallelogramma $ADCB$ tirando da A e da B le parallele ai lati BC ed AC del triangolo. Si troverà come precedentemente che i due triangoli ABC, ABD sono eguali, e quindi che ABC è metà del parallelogramma $ABCD$. Adunque:



La misura dell'area del triangolo è eguale alla metà del prodotto delle misure della base e dell'altezza corrispondente.

Così per il trapezio si trova che:

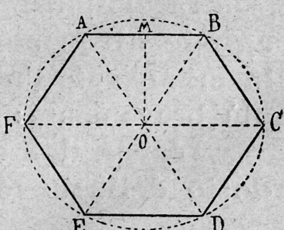
La misura dell' area del trapezio è eguale al semiprodotto della somma delle basi per l'altezza.

Es. Se le basi sono rispettivamente dm. 2,2 e dm. 3,42 e se l'altezza è di dm. 1,8, l'area del trapezio è data da:

$$\frac{(2,20 + 3,42)}{2} \times 1,8 = 2,81 \times 1,8 = 5,058$$

(leggi: 5 decimetriquadrati, 5 centimetriquadrati e 80 millimetriquadrati).

86. Dato un poligono regolare $ABCDEF$, sappiamo che vi è un circolo di centro O che passa pei vertici di esso; il segmento OM della perpendicolare condotta da O ad un lato, segmento che è eguale per tutti i lati, dicesi l'*apotema* del poligono. I triangoli AOB, BOC,... ecc., nei quali viene diviso il poligono essendo tutti eguali ed avendo ciascuno per altezza corrispondente alle basi AB, BC,... l'apotema del poligono, ne risulta che per avere l'area del poligono regolare basta prendere tante volte l'area di un solo triangolo, quanti sono



lati del poligono, o, ciò che è lo stesso basta prendere il semiprodotto dall'apotema per tante volte un lato quanti sono i lati stessi sicchè:

La misura dell'area di un poligono regolare è eguale al semiprodotto della misura del perimetro per l'apotema.

87. Per avere l'area di una superficie qualunque, la quale si possa scomporre in triangoli, basta determinare l'area dei singoli triangoli poi fare la somma dei numeri così ottenuti.

Per unità di misura della superficie nel sistema metrico decimale si assume il *metroquadrato* (mq); esso si suddivide in 100 decimetriquadrati (dmq); il dmq. in 100 centimetriquadrati (cmq); e il cmq in 100 millimetriquadrati (mmq). Invece di scrivere: mq, dmq, cmq, mmq si scrive anche m^2, dm^2, cm^2, mm^2, rispettivamente.

Nell' agrimensura si fa uso dell' *ara*, che è di 100 mq e che si dinota brevemente con; *a*. L'*Ettara* o *Ettaro* è eguale a 100 are, quindi a 10000 mq, essa dinotasi con: *ha*.

Vogliasi ad es. scrivere che l'area di A è tre mq, venticinque dmq e tredici cmq; si scriverà: $A =$ mq 3,2513.

Vogliasi ancora scrivere che l'area di A è tre mq, cinque dmq e tredici cmq: si scriverà: $A =$mq 3,0513.

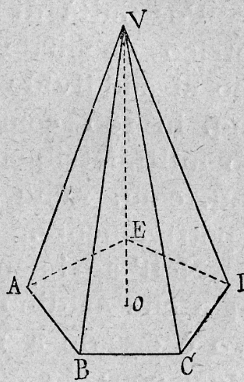
Reciprocamente, vogliasi enunciare l'area espressa da; $A =$ mq 14,2. Si dovrebbe qui dire: A è mq 14 e 2 decimi di mq; ma il decimo di mq essendo un rettangolo (che ha per lati un m. e un dm) e non già un quadrato, e non essendovi nell'uso comune un vocabolo speciale per indicare il decimo di metroquadrato, così leggeremo: 14,20 invece che 4,2 e diremo: A è mq 14 e 20 dmq, giacchè il centesimo di mq è appunto il dmq.

Similmente l'area espressa da: $A =$ mq 14,2513 leggesi, *raccogliendo a due a due le cifre decimali*, per la ragione anzidetta, mq 14, 25 dmq e 13 cmq. E così pure l'area espressa da: $A =$ *ha* 3,456 leggesi: ettari 3, mq 45 e 60 dmq: oppure, se ci può esser utile: 345 mq e 60 dmq; od anche: 34560 dmq.

In alcuni luoghi si usano unità di misura lineari e di superficie differenti, secondo le consuetudini; e il loro valore in metri od in metriquadrati si trova in apposite tabelle.

88. Per il prisma retto si ha la seguente regola:

La misura della superficie laterale di un prisma retto è eguale al prodotto di uno spigolo per il perimetro della base.



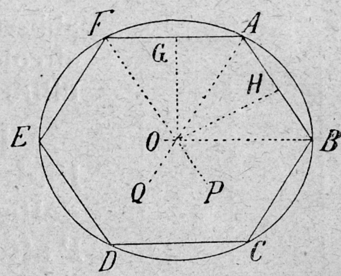
89. Data una piramide qualunque la superficie laterale è come sappiamo, l'insieme delle sue faccie triangolari; se ne avrà quindi l'area sommando le aree delle sue faccie laterali.

Ma se la piramide è regolare, la sua base è un poligono regolare e le sue faccie laterali sono triangoli isosceli ed eguali tra loro; l'altezza di ognuno di questi triangoli, che dicesi *apotema* della piramide, è la stessa per tutti. Si ha pertanto la regola:

La misura della superficie laterale di una piramide regolare è eguale al semiprodotto del perimetro della base per l'apotema.

90. Ora consideriamo un circolo di centro O e di raggio OA, e imaginiamo un poligono regolare come ad es. $ABCDEF$ i cui vertici siano tutti sulla circonferenza di questo circolo, o, come si suol dire, un poligono regolare *inscritto* nel circolo stesso, e di cui l'apotema è indicata con OM. Si

sa che l'area di esso poligono è data dal prodotto del perimetro per la metà dell'apotema: e questo vale per quanto grande sia il numero dei lati del poligono stesso. Coll'aumentare del numero dei lati del poligono regolare inscritto si intuisce che ciascun lato del poligono diventa sempre più piccolo perchè più piccolo diventa l'arco da esso sotteso, e se anche noi facessimo l'esperimento troveremo che seguitando ad aumentare il numero dei lati del poligono inscritto avverrà un momento in cui potremo praticamente ritenere che l'arco sotteso dal lato si confonda col lato stesso. Allora il perimetro del poligono si confonde con la circonferenza, e in pari tempo l'apotema col raggio.



Nella geometria razionale si dimostra che il rapporto fra la circonferenza e il proprio diametro è lo stesso numero per tutti i circoli.

Per trovare la lunghezza approssimata della circonferenza e l'area approssimata del circolo si hanno queste regole pratiche:

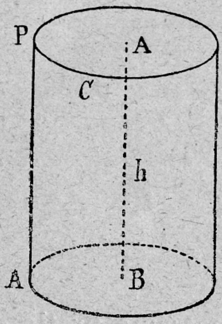
La lunghezza approssimata della circonferenza si ottiene moltiplicando per 3,1416 la lunghezza del diametro.

Es. La lunghezza della circonferenza di un circolo di m. 3,5 di raggio è circa: 21,99 (leggi: 21 metri e 99 centimetri).

L'area del cerchio si ottiene moltiplicando la lunghezza della circonferenza per la metà del raggio.

Es. L'area del cerchio di m. 7 di raggio è circa: 153,9384 (leggi: 153 metriquadrati, 93 decimetriquadrati e 84 centimetriquadrati).

91. La superficie laterale del cilindro, confrontata con la superficie laterale di un prisma retto il cui poligono base è un poligono regolare di un numero abbastanza grande di lati, inscritto nel circolo base del cilindro, conduce a stabilire la seguente regola:

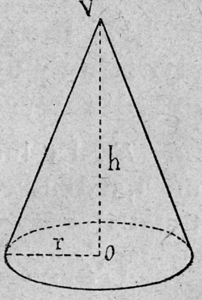


La superficie laterale del cilindro ha per misura il prodotto della circonferenza della base per l'altezza.

Es. Se il raggio della base del cilindro è di cm. 2 e l'altezza di cm. 6 la circonferenza della base è misurata approssimativamente da 4 × 3,1416 cioè da: 12,566« (12 centimetri 5 millimetri ecc.) e la superficie laterale da: (12,5664) × 6 cioè da 75,3987, (leggi: 75 centimetriquadrati, 39 millimetriquadrati e 87 centesimi di millimetriquadrati).

92. Similmente, la superficie laterale del cono, confrontata con la superficie laterale di una piramide regolare, il cui poligono base sia un poligono regolare inscritto nel circolo base del cono, e di un numero abbastanza grande di lati (nel qual caso l'apotema della piramide tende a confondersi col lato del cono) dà luogo alla regola seguente:

La superficie laterale del cono ha per misura il semiprodotto della circonferenza base per il lato del cono.



Es. Se il raggio della base del cono è di m. 0,60, e il lato m. 4, la superficie laterale è data da: (1,20 × 3,1416).2 ossia da 7,539840 (7 metriquadrati, 53 decimetriquadrati, 98 centimetriquadrati e 40 millimetriquadrati).

93. A tutte queste regole aggiungiamo la seguente (la quale si spiega essa pure nella Geometria razionale) per la valutazione dell' area della sfera:

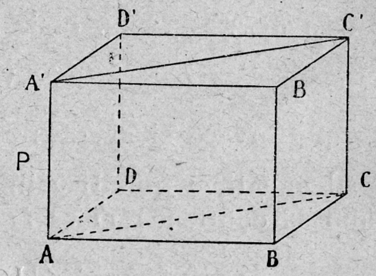
La superficie della sfera ha per misura il quadruplo dell'area di un circolo che ha per raggio il raggio della sfera.

Es. Se il raggio della sfera è di cm. 5, la superficie è data da: $(25 \times 3{,}1416) \times 4$, cioè da: 314,16 (leggi: 314 centimetriquadrati e 16 millimetriquadrati).

Volumi.

94. Avendosi ad es. il cubo P, della figura seguente, se noi conduciamo il piano $AA'C'C$. otteniamo due prismi, $ABCA'B'C'$ ed $ACDA'C'D'$, i quali non hanno, oltre alla faccia $AA'C'C$, in comune alcun punto, e che appartengono entrambi al solido P. Il solido P dicesi perciò **somma** dei due prismi $ABCA'B'C'$ ed $ACDA'C'D'$.

Avendosi invece due poliedri M ed N, se noi li uniamo in modo che abbiano un vertice, o uno spigolo o qualche faccia, o parte di faccia in comune, senza però avere alcun altro punto in comune, il solido P che ne risulta, dicesi ancora *somma* dei due poliedri M ed N; e ciò si esprime scrivendo: $P = M + N$.



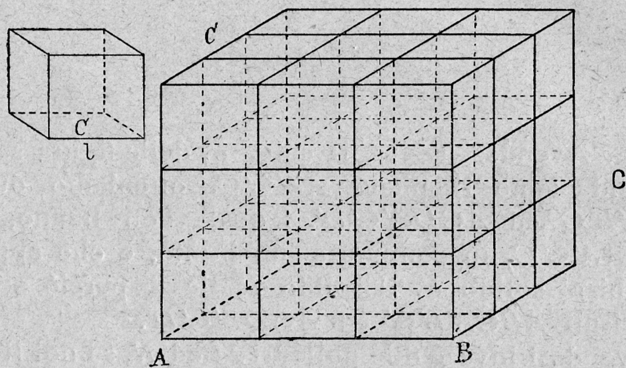
Diciamo che due solidi **sono equivalenti,** o che **hanno volumi eguali,** quando essi sono tali che si possano scomporre in parti, ciascuna a ciascuna rispettivamente eguali.

La somma di due poliedri può ottenersi in differenti modi, disponendo diversamente i poliedri stessi che la compongono:

perciò i solidi che ne risultano pur non essendo eguali **hanno volumi eguali**, cioè **sono equivalenti**.

Le relazioni: $A = 5\,B$, $A = \frac{1}{4}\,B$, $A = \frac{3}{4}\,B$, quando A e B dinotano dei poliedri, hanno lo stesso significato che è stato indicato pei segmenti, per gli angoli, per le superficie.

95. Consideriamo un cubo c di lato l ed un altro cubo C di lato $AB = 3\,l$. Risulta dalla figura che il cubo C



consta di $3 \times 3 \times 3$ ossia 27 volte il cubo c: cosicchè:

$$C = (3 \times 3 \times 3)\,c.$$

Se invece si avesse: $AB = \frac{11}{3}\,l$ allora si dividerà l in 3 parti eguali, e quindi c in 27 cubettini c', e si troverà che il cubo C contiene: $11 \times 11 \times 11$ volte c'; ossia

$$C = \left(\frac{11}{3} \times \frac{11}{3} \times \frac{11}{3}\right) c.$$

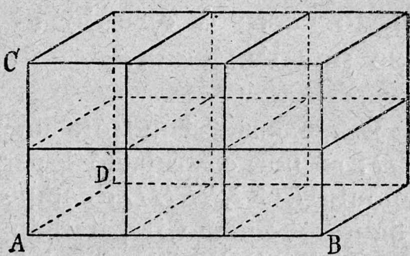
Se invece non vi è alcuna parte aliquota di l che stia esattamente in AB, allora si procederà come al n. 74; la regola per trovare la misura del cubo è in ogni caso la seguente:

La misura del volume del cubo è il prodotto di tre fattori eguali alla misura del suo lato: od anche:

Il volume del cubo è eguale alla terza potenza del suo lato.

Es. Se il lato del cubo è di m. 0,5 il suo volume sarà dato da: $0,5 \times 0,5 \times 0,5$ cioè da: 0,125 (leggi 125 decimetri cubi, o litri).

96. Se consideriamo ancora il cubo c di lato l ed il parallelopipedo rettangolare P i cui spigoli concorrenti in A sono AB, AC, AD e se ad es. $AB = 3\ l$, $AC = 2\ l$ $AD = 4\ l$ troviamo subito che il parallelopipedo P contiene $3 \times 2 \times 4$ ossia 24 volte il cubo c: sicchè: $P = (3 \times 1 \times 4)\ c$.



Vale in generale la seguente regola:

La misura del volume del parallelopipedo rettangolo è eguale al prodotto delle misure dei tre spigoli concorrenti in uno stesso punto.

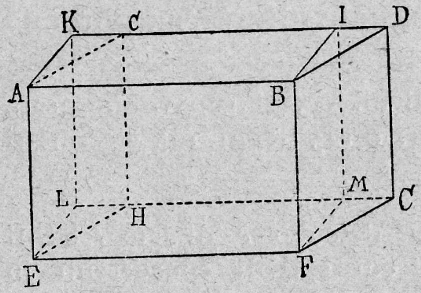
Siccome però 3×2 è la misura dell'area della base del parallelopipedo P, e 4 è la misura dell'altezza, così si può anche dire:

La misura del volume del parallelopipedo rettangolo è eguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.

Es. Se la base è di mq. 3,5 e l'altezza di m. 0,6 il volume del parallelopipedo è dato da: $3,4 \times 0,6 = 2,10$ (leggi 2 metricubi e 100 decimetricubi).

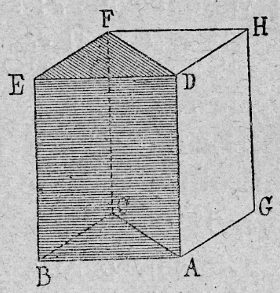
97. Se fosse dato un parallelopipedo retto, che abbia per basi due parallelogrammi $ABCD$, $EFGG$, si costruiscano

i rettangoli *AKIB* ed *EFML* che sono equivalenti ai detti parallelogrammi: si troverà che i due prismi *FCMBDI* ed *EHLACK* sono eguali, essendo costruiti allo stesso modo, e quindi che il parallelopipedo dato è equivalente al parallelopipedo rettangolo *AELKBFMI*. Per conseguenza vale la regola:



La misura del volume di un parallelopipedo retto è eguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.

98. Consideriamo ora un prisma triangolare retto *ABC EFD*: se noi costruiamo i parallelogrammi *ABCG*,*EFHD* e completiamo la figura otteniamo il parallelopipedo retto *ABCGDEFH* doppio del prisma dato, però la base del parallelopipedo è doppia di quella del prisma.



Di qui la regola:

La misura del volume del prisma triangolare retto è eguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.

99. Dalla Geometria razionale si hanno poi queste altre regole:

La misura del volume di un prisma qualunque è uguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.

Es. Se l'area della base del prisma è di centimetriquadrati 5 e l'altezza di centimetri 9, il volume sarà di centimetricubi 45.

La misura del volume di una piramide qualunque è eguale ad un terzo del prodotto dell' area della base per l' altezza.

Es. Se l'area della base della piramide è di centimetri-quadrati 5 e l'altezza di cm. 9, il volume sarà di centimetricubi $\frac{45}{3} = 15$.

100. Dato un cilindro, se noi confrontiamo il solido da esso determinato col prisma retto il cui poligono base sia un poligono regolare di un numero abbastanza grande di lati, inscritto nella base del cilindro, siamo per analogia condotti a stabilire la seguente regola:

La misura del volume del cilindro è eguale al prodotto dell' area della base per l' altezza.

Es. Il volume del cilindro di cui la base è cm. 2 di raggio e l'altezza cm. 6 è dato da: 75,3984 (leggi 75 centimetricubi, 398 millimetricubi e 4 decimi di millimetrocubo).

101. Per le stesse considerazioni confrontando il cono col volume di una piramide regolare avente un numero abbastanza grande di faccie, otteniamo la regola:

La misura del volume del cono è eguale ad un terzo del prodotto dell' area della base per l' altezza.

Es. Se il cono ha la base il circolo di cm. 5 di raggio e l' altezza di cm. 6 si avrà per il volume: $(25 \times 3,1416) \times \frac{6}{3}$ ossia: 157,08 (leggi 157 centimetricubi e 80 millimetri cubi).

102. Per la sfera, si ha dalla geometria razionale la seguente regola:

La misura del volume della sfera è eguale al prodotto della superficie per un terzo del raggio.

Es. Il volume della sfera di centimetri 10 di raggio è dato da: $(4 \times 3{,}1416 \times 10^2) \cdot \frac{10}{3}$ cioè da: 4188,8 (leggi 4 decimetri cubi, 188 centimetri cubi e 800 millimetri cubi.

103. L'unità di misura dei volumi nel sistema metrico decimale è il **metro cubo** (mc) cioè il cubo che ha per lato un metro (m) e quindi per faccia il metroquadrato (mq). Esso dividesi in 1000 decimetri cubi (dmc); ogni decimetro cubo in 1000 centimetri cubi (cmc); ogni centimetro cubo in 1000 millimetri cubi (mmc). Invece di: mc, di: dmc, di: cmc, di: mmc. si scrive spesso rispettivamente m^3, dm^3, cm^3, mm^3.

Vogliasi ad es. esprimere che un volume V è tre mc, centoventicinque dmc, e duecento cmc: si scriverà: $V =$ mc 3,125,200. Vogliasi ancora esprimere che il volume V è tre mc, quattro dmc, e duecento cmc: si scriverà: $V =$ mc 3,004200.

Reciprocamente, vogliasi enunciare il volume espresso da: $V =$ mc 3,45. Si dovrebbe dire: V è mc 3, più 4 decimi di mc, più 5 centesimi di mc; ma il decimo di mc non essendo un cubo (ma un parallelopipedo che ha per base 1 mq e per altezza 1 dm) e così pure il centesimo di mc non essendo pur esso un cubo (ma un parallelopipedo che ha per base 1 dmq e per altezza 1 m), noi leggeremo quella misura come se fosse stata scritta così: $V =$ mc. 3,450 e cioè: 3 mc e 450 dmc, essendo la millesima parte del mc ancora un cubo e propriamente il dmc.

Similmente il volume espresso da $V =$ mc 3,2513 si leggerà, *raccogliendo a tre a tre le cifre decimali*, per la ragione anzidetta, come segue: 3 mc, 251 dmc e 300 cmc; od anche così: 3251 dmc e 300 cmc; o, se si vuole: 3251300 cmc.

104. L'unità di misura per i liquidi e per gli aridi chiamasi **litro** ed equivale al dmc. Il litro si suole chiamare unità principale delle misure di capacità, perchè con questo vocabolo capacità si suole indicare il volume interno di un recipiente, come ad es. il volume dell'acqua o di grano che lo riempie.

Per le misure di capacità più grandi si assume come unità di misura l'**ettolitro** (El): esso è eguale a 10 *decalitri* (Dl); ogni decalitro è 10 litri (l), e ogni litro 10 decilitri (dl).

Avendosi ad es. El 3,56 tanto si può leggere: 3 El, più 56 l quanto: dmc 356, giacchè 1 El equivale a 100 litri e quindi a 100 dmc.

ESERCIZI *)

1. Si segnino tre segmenti a, b, c, e si costruiscano le somme $(a+b)$ e $(b+c)$; indi si verifichi che: $a+(b+c)$ e $(a+b)+c$ sono eguali.

2. Un segmento a è lungo m. 3,5 e un altro segmento b è lungo m, 4: quale è la misura di a rispetto a b?

3. Un segmento a è m. 3,5 e un altro segmento b è m. 4,25; quale è la misura di a rispetto a b?

4. Un angolo è $40^{\circ}.\ 5'.\ 20''$; lo si esprima in gradi, decimi e centesimi di grado.

5. Due angoli si dicono *supplementari* se sommati insieme dànno 180°. Un angolo è $40^{\circ}.\ 5'.\ 20''$; qual'è l'angolo supplementare?

6. Due angoli si dicono *complementari* se sommati insieme dànno 90°. Un angolo è $40^{\circ}.\ 5'\ 20''$; qual'è l'angolo complementare?

7. Completare le seguenti eguaglianze:

$18^{0}\,.\,12'\,.\,35'' + 142^{0}\,.\,57'\,.\,36'' + 8^{0}\,.\,16'\,.\,20'' = \ldots.$

$45^{0}\,.\,8'\,.\,23'',5 - 20^{0},\,30' = \ldots.$

$(45^{0}\,.\,8'\,.\,23'',5) \times 5 = \ldots.$

$(45^{0}\,.\,8'\,.\,23'',5) : 2 = \ldots$

---

*) Questi esercizi vanno dati qui, dopo il cap. che tratta della misura; ma siccome nell'Aritmetica pratica si tratta del sistema metrico decimale e dell'estrazione della radice quadrata nella III[a] classe, così conviene rimandare la risoluzione della maggior parte di questi esercizi alla III[a] classe, come prescrivono i programmi. L'insegnante vedrà facilmente quali di questi esercizi potrà proporre frattanto agli alunni anche nella II[a] per l'immediata applicazione delle regole apprese sulla misura, acciò rimangano impresse nelle menti di essi per non dovere ripeterle poi un'altra volta nella III[a] classe.

8. Quale angolo descrive la lancetta maggiore di un orologio in 30 minuti?

9. I cateti di un triangolo rettangolo sono dm. 4 cm. 2; qual' è l' area?

10. I cateti di un triangolo rettangolo sono m. 4,5 e m. 3,75; quale l' area?

11. I lati paralleli di un trapezio sono m. 5 e m. 7 e l' area del trapezio è mq. 21; quale ne è l' altezza?

12. Per tappezzare una stanza rettangolare lunga m. 9,50 e larga m. 4,8 si ha una stoffa larga m. 0,80; quanti metri di questa stoffa occorrono?

13. Quanti macigni occorrono per selciare una strada larga m. 20 e lunga m. 155 se i macigni sono quadrati di dm 2 di lato?

14. Quante viti saranno contenute in un ettaro di terreno ponendole alla distanza di m. 0,80 fra loro e in filari distanti del pari m. 0,80?

15. Il disegno topografico è fatto in scala da 1 a 1250 (vale a dire che ad ogni metro del disegno ne corrispondono 1250 sul terreno); quale area sul terreno corrisponderà ad un trapezio che ha per area cm.^{2} 5,3 e che ha le basi rispettivamente di cm. 3 e 2? Quale lunghezza in m. corrisponde sul terreno a mm. 25 del disegno?

16. Un proprietario permuta un suo terreno di ettari 5,6 e del valore di cent. 50 al mq. con quello di un altro proprietario, che è di ettari 7,05 e del valore di cent. 40 al mq. Quante lire deve dare il primo proprietario al secondo?

17. I tre spigoli che si riuniscono in un vertice di un parallelopipedo rettangolo sono dm. 9 dm. 5 e m. 1,5. Qual' è la superficie del parallelopipedo?

18. Lo spigolo di un prisma retto triangolare è di dm. 9 ed i lati di una delle due basi sono dm. 5, dm. 7 e dm. 3,9. Calcolare la superficie laterale del prisma.

19. Calcolare la superficie totale di un prisma retto che ha per base un rettangolo di lati; dm. 7 e dm. 9, e per spigolo un segmento di 1 m.

20. Qual' è l'area della superficie laterale di una piramide regolare la quale ha per base un esagono regolare di dm. 8 di lato e per apotema m. 2,91.

21. Qual' è l'area della superficie totale di un prisma retto a base quadrata se il lato della base è m. 0,5 e l'altezza m. 2,4?

22. Una camera è lunga m. 6,50, larga m. 4,08, alta m. 5. Ha una porta di m. 2,20 per m. 1,50 e due finestre ciascuna di m. 1,80 per m. 1,20. Quanti rotoli di carta sono necessari per tappezzare le pareti sapendo che questi rotoli (che si vendono interi) sono lunghi m. 10 e larghi cm. 50, e lasciando libera nelle pareti una striscia in basso (abbassamento) alta cm. 30 e una striscia in alto (cornice) alta cent. 20?

23. Il raggio di un circolo è m. 3,7: quale ne è la lunghezza della circonferenza. Quale è la misura di questa circonferenza rispetto a quella di un altro circolo il cui raggio è m. 7,4.

24. Il raggio di un circolo è m. 3,7, quale ne è l'area? E quale è la misura di quest'area rispetto a quella di un altro circolo il cui raggio è m. 7,4?

25. Di quanti metri è un arco che è $\frac{3}{7}$ di una circonferenza, il cui diametro è metri 2?

26. Quale sarà il raggio di un circolo la cui circonferenza è lunga 1 metro?

27. Un cavallo percorre un ippodromo circolare del raggio di m. 505 in 5′, 4″. Quanti metri percorre in un secondo?

28. La misura presa, con un nastro, della circonferenza di un tronco d'albero è di m. 8. Qual'è il raggio?

29. Un cilindro ha per base un circolo di m. 0,25 di raggio e per altezza m. 0,8; quale è la superficie laterale e quale la superficie totale?

30. Un cono ha un lato di un metro e il diametro della base pure di un metro; quale ne è la superficie totale?

31. Una sfera ha per raggio un metro, una seconda sfera ha per raggio m. 0,5. Quale è la misura della superficie della prima rispetto alla superficie della seconda?

32. Due circonferenze concentriche sono lunghe l'una 3 metri e l'altra m. 4,50. Quale è l'area della corona circolare da esse formata?

33. Un cubo ha lo spigolo doppio di quello di un altro cubo. Qual'è la misura della superficie totale del primo rispetto alla superficie totale del secondo?

34. La superficie laterale di un cono, il cui lato è doppio del raggio della base, è cm^2 80. Quale è il raggio della base? (Estr. della radice quadrata).

35. Un decoratore deve dipingere una sala circolare del rag-

gio di m. 10 e che ha il soffitto a cupola emisferica colle pareti alte m. 8, a L. 9 al mq. Qnale sarà la spesa?

36. Calcolare la superficie totale di una caldaia cilindrica con fondi emisferici, lunga m. 9 e del raggio di m. 0,80.

37. Un cubo ha lo spigolo doppio di quello di un altro cubo. Qual' è il rapporto fra il volume del primo e quello del secondo?

38. Il volume di un cubo è di dmc. 64 e la sua superficie è di dmq. 96. Qual' è in dm. il suo spigolo?

39. L'altezza di un cono è dm. 8 e il raggio della base è dm. 1,5. Calcolare il volume del cono.

40. Calcolare il volume di una sfera di m. 1,5 di raggio e confrontar questo col volume di un'altra sfera di raggio doppio.

41. In quale rapporto stanno i volumi di un cono e di un cilindro che hanno la stessa base e la stessa altezza?

42. Quanto pesa un cubo massiccio di rame di m. 0,18 di lato, sapendo che un dmc. di rame pesa kg. 8,8? Quanto peserebbe se fosse cavo e di grossezza eguale a 2 cm.?

43. Quanti metri cubi d'aria contiene una sala lunga m. 9,59 larga m. 5,70 e alta m. 4,85?

44. Una torre cilindrica ha m. 20 d' altezza, m. 8 di diametro interno e 54 cm. di spessore. Quanti mc. di muratura contiene?

45. In un vaso cilindrico alto cm. 2,2 e di cm. 8 di raggio e che contiene del liquido, si immerge una palla di metallo che fa innalzare il liquido nel cilindro di centim. 6. Qual' è il volume della palla?

46. Se in una vasca parallelopipeda rettangolare alta m. 2, larga m. 1 e lunga m. 12 versano dell'acqua due rubinetti dai quali sgorgano litri 2 al secondo, in quanto tempo si riempirà la vasca?

47. Un ettaro di terreno dà 12 quintali di grano. Sapendo che un mc. di grano pesa kg. 76, quanti ettolitri di grano si avranno? E quale sarà il prezzo che si ricaverà se l'ettolitro di grano costa L. 15?

48. Una porzione di fieno che occupa uno spazio equivalente ad un parallelopipedo rettangolare di mq. 0,20 per m. 0,20 pesa kg. 0,95. Quale è il peso di un mc. di fieno?

49. La circonferenza di un tronco d'albero cilindrico lungo m. 8 è m. 3,5. Si trovi il volume dell' albero.

50. Con una palla di creta di diametro cm. 12 si forma un

cono, la base del quale ha per raggio cm. 2. Calcolare l'altezza del cono.

Osservazioni. La geometria razionale dimostra la seguente notevole proposizione: **Il quadrato costruito sull' ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.**

Questa proposizione si chiama teorema di *Pitagora*, dal nome del geometra greco, che per primo la scoperse. Possiamo anche dire pei concetti svolti nel cap. II°:

La misura del quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma delle misure dei quadrati dei cateti.

O più brevemente:

Il quadrato dell' ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati dei cateti, quando per lati del triangolo rettangolo s' intendano le loro lunghezze espresse in unità lineare.

Così ad es. se si ha un triangolo rettangolo i sui cateti sono di m. 4 e di m. 3, il quadrato dell'ipotenusa è mq. 16 + mq. 9, cioè mq. 25, e quindi l' ipotenusa è m. 5. E se l' ipotenusa è di m. 5 e un cateto di m. 4, il quadrato dell' altro cateto è di mq. 25 - mq. 16, cioé mq. 9, e quindi il cateto è di m. 3.

Dal teorema di Pitagora e dalle regole precedenti sulla misura si ricava la soluzione dei seguenti esercizi:

51. Si verifichi che il rapporto fra l'apotema e il lato del triangolo equilatero è 0,29 con approssimazione per eccesso nei centesimi dell' unità.

52. Si verifichi che il rapporto fra l'apotema ed il lato dell'esagono regolare è 0,87.

53. Calcolare l'area del triangolo equilatero di lato m. 3,45.

54. Calcolare l'area dell'esagono regolare di lato m. 1,05.

55. Dato un quadrato di lato di cm. 5, calcolare il raggio del circolo circoscritto al quadrato.

56. Dato un circolo di raggio di dm. 3, calcolare il lato del quadrato inscritto.

57. Con la terra di un' aiuola, di base esagonale regolare col lato di m. 3, si vuol formare un' altra aiuola di base circolare e della stessa altezza. Quale sarà il raggio della nuova aiuola?

58. Da un tronco d'albero cilindrico di m. 10 di lunghezza e di m. 0,50 di raggio si ricava una trave di base quadrata inscritta nel tronco d'albero. Quale sarà il volume della trave?

59. La superficie totale di un dado è di mq. 25. Qual' è la

unghezza dello spigolo del dado?

60. Quanti mc. contiene un cono se la sua sezione attraverso l'asse è un triangolo equilatero di mq. 4 di area?

61. La superficie totale del cono è mq. 28,31; quella laterale è mq. 20,81. Qual'è il volume del cono?

62. Con una palla di creta del diametro di cm. 12 si vuol formare un cono alto cm. 30. Quale sarà il raggio della base del cono?

CAPITOLO III.°

Istrumenti ed oggetti di disegno.

105. Oltre al disegno a mano libera vi è il disegno geometrico; questo ha per iscopo la rappresentazione, mediante appositi istrumenti, delle figure geometriche sopra una superficie, generalmente sopra un piano.

Un principio che il disegnatore deve sempre ricordare è questo: che la risoluzione di un dato problema per mezzo di costruzioni geometriche è da ritenersi tanto più semplice e più esatta quanto minore è il numero delle costruzioni stesse e quanto più esatto e facile è l'uso degli istrumenti.

106. Un punto si segna con la punta di una matita, o con l'incrocio di due linee, o con l'estremità di una linea. Quando per un punto devono passare molte linee, per la nitidezza del disegno, giova circondare il punto con un circolino, dal quale si partono le linee medesime.

107. I principali istrumenti, dei quali si fa uso nel disegno geometrico elementare, sono: la *riga*, la *squadra*, e il *compasso*.

---

*) Qui daremo i primi rudimenti di *disegno geometrico* limitandoci alle più semplici costruzioni della geometria elementare piana.

Tra i compassi sono da distinguersi quello a punte fisse e quello a punte mobili inserite in ciascuna delle gambe del compasso mediante una piccola vite.





Una delle due punte viene sostituita talora da un *portamatita* o da un *tiralinee.*

Il tiralinee è anche un istrumento che serve a tracciare delle rette od altre linee coll'inchiostro, senza far uso del compasso.

108. Gli oggetti che comunemente si usano nel disegno geometrico, sono la *carta*, la *matita*, *l'inchiostro*, la *gomma elastica*, le *penne* e il *temperino.*

Le matite sono di varie qualità, secondo le fabbriche da cui provengono; esse sono contrassegnate da numeri secondo la loro durezza. La matita deve essere bene appuntita, epperò deve essere di buona qualità, perchè altrimenti la punta si rompe o si consuma facilmente.

Le linee che si disegnano colla matita devono essere nitide e precise; esse vanno segnate leggermente e in modo da poterle facilmente cancellare colla gomma elastica, ove ciò occorresse, senza lasciar traccia alcuna sulla carta.

La punta della matita deve aver la forma conica e regolare affinchè, tenendola verticalmente e scorrendo sull'orlo della riga o di altro oggetto analogo, la linea tracciata riesca più esatta.

La gomma elastica non deve esser troppo dura alla temperatura ordinaria, nè troppo tenera, e non deve lasciar sulla carta alcuna traccia: per ciò, prima di usarla, la si prova in disparte su un pezzetto di carta.

L'inchiostro di china serve a passare in nero il disegno già fatto a matita. Esso vendesi in piccoli bastoncini. Per usare l'inchiostro di china lo si discioglie prima in un po' d'acqua, posta in una ciotola o scodellino, fregando l'estremità del bastoncino sul fondo. Si introduce poi l'inchiostro

nel tiralinee bagnando una penna pulita, o l'estremità di un pezzetto di carta nell'inchiostro stesso, e passandolo fra le punte del tiralinee, non perfettamente chiuse.

Bisogna badare che le laminette del tiralinee, sieno sempre pulite esternamente, e che le punte siano vicine così da poter disegnare le linee della grossezza di cui si ha bisogno. Basterà a tal uopo provare sempre il tiralinee su un foglio di carta a parte, che si tiene sul disegno prima di passare coll'inchiostro.

Tracciando una circonferenza col tiralinee bisogna porre attenzione che ritornando al punto dal quale si è incominciato a tracciare la linea, nessuno si accorga di questo punto di unione, e il tratto risulti sempre nitido ed uniforme. È per ciò che per tracciare un circolo col compasso, affinchè la distanza delle punte non cangi facilmente, si stringe sufficientemente la cerniera.

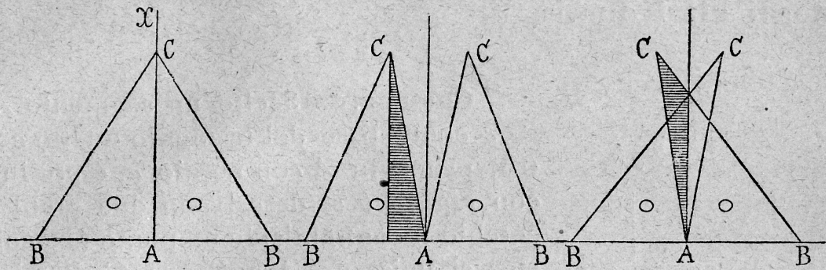
La punta della matita o del tiralinee del compasso deve combaciare col punto del disegno quando si tiene il compasso verticale, perchè è più facile tenere il compasso in questa posizione ruotandolo intorno alla sua punta fissa, che non in una posizione inclinata. La testa del compasso deve essere tenuta fra le prime tre dita della mano.

109. *Verifica della riga.* Per verificare se una riga è esatta si tracci colla matita appuntita la linea AB e poi si faccia combaciare, come indica la figura, il punto B della riga col punto A. Se nella seconda posizione la linea tracciata combacia colla prima, la linea è una retta, e la riga è esatta. Se ciò non succede, la riga non è esatta e la si riduce tale con la carta smerigliata.

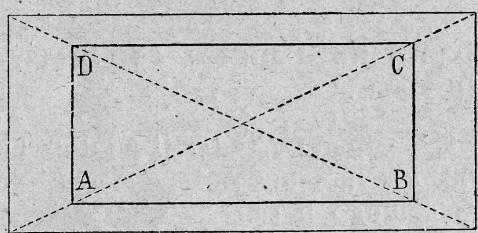


110. *Verifica della squadra.* Si appoggia un cateto della squadra ABC lungo una retta AB e si segna la retta AX facendo scorrere la punta della matita lungo l'altro cateto; indi si rovescia la squadra in modo che il lato AB si porti

in AB'. Se l'orlo dell'altro cateto combacia con AC come nel primo caso, la squadra è esatta. Se invece si verificano gli altri due casi, allora bisogna togliere dalla squadra la parte tratteggiata.



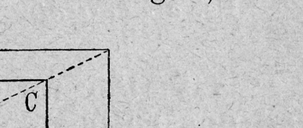
Per disporre bene le figure sulla carta, anche per i problemi più semplici, bisogna *squadrare la carta*. Questa operazione consiste nel disegnare un rettangolo $ABCD$ le cui diagonali sono date da quelle del foglio del disegno; basta



col centro nel punto d'incontro O segnare i punti A,B,C,D ad eguale distanza da O, indi congiungere questi punti.

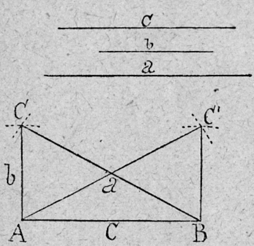
Costruzioni fondamentali.

111. Nella risoluzione di un problema le linee date si segnano a tratto continuo, sottile; le linee trovate a tratto continuo più marcato oppure a tratto e punto alter-



nati; le linee di costruzione ausiliare, a tratti interrotti, oppure a punti *).

112. Costruire un triangolo, dati i tre lati *a*, *b*, *c*, dei quali uno qualunque è minore della somma degli altri due.



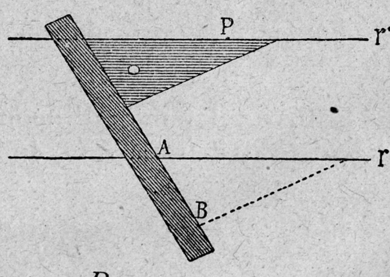
Costruz. — Scelto un segmento $AB = c$ come base del triangolo e fatto centro, prima in A con raggio a, e poi in B con raggio b si descrivano due archi di cerchio incontrantisi in un punto C e colla riga si uniscano A e B con C. Il triangolo ABC è il triangolo richiesto.

Se si scambiano i lati a e b fra di loro, si ha il triangolo ABC' eguale al triangolo ABC.

Es. 1 - *Costruire il triangolo isoscele, data la base e un altro lato.*
Es. 2 - *Costruire il triangolo equilatero, dato il lato.*

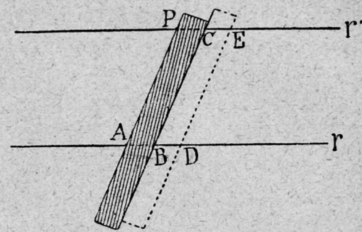
113. Per un dato punto condurre la parallela ad una retta data.

Costruz. 1. — Siano P ed r il punto e la retta: si faccia combaciare con r l'ipotenusa di una squadra e lungo il cateto AB di essa si applichi la riga. Si faccia poi scorrere la squadra finchè l'ipotenusa venga a passare per P: e si tracci la retta r', che possa poi colla riga essere prolungata. La r' è la retta parallela alla r passante per P.



*) L'alunno dovrà abituarsi a tracciare cogli istrumenti ed a mano libera, tanto sul foglio del disegno che sulla lavagna, di queste rette in posizioni diverse.

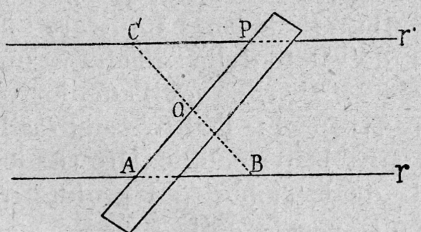
Costruz. 2. — Se si ha una riga coi due orli esattamente paralleli, si faccia passare uno degli orli per P e sia A il suo punto d'incontro con la retta r. Si segni nel secondo orlo il segmento $BC = AP$; i punti P e C ci daranno la parallela condotta da P alla r.



Oss. — Siccome la riga ha una larghezza relativamente piccola, così i punti P e C sono troppo vicini, e quindi non si può fidarsi della esattezza di questa costruzione, eccetto che si trasporti la riga convenientemente in posizioni successive: in tal caso però è da badare che la costruzione, per altre ragioni diviene più complicata, e quindi è opportuno ricorrere ad altre costruzioni *).

Costruz. 3. — Si traccino sopra l'orlo di una lista di carta due segmenti consecutivi eguali AO, OP, e, posto il punto P della lista nel punto P dato, si faccia girare intorno a P l'orlo della lista finchè A venga a trovarsi sulla retta r. Si congiunga allora un punto qualunque B della r con O e si faccia $OC \equiv OB$; la retta PC è la richiesta. Invece della lista di carta si può talvolta far uso anche del doppio decimetro.

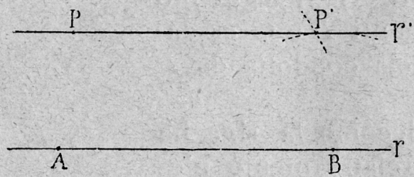
Oppure: scelto il punto A sulla retta r e segnato il segmento AP sopra una lista di carta, piegando l'orlo di questa in modo che P venga a cadere in A. il punto, ove l'orlo viene piegato, ci dà O: segnato questo, si procede come precedentemente.



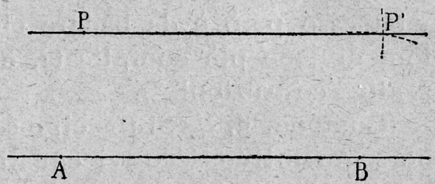
Costruz. 4. — Si scel-

*) Questa costruzione si è qui voluta accennare per dimostrare che se la risoluzione dei problemi di geometria elementare si può *teoricamente* eseguire anche con la riga a due orli, o col solo compasso, quasi sempre tali metodi non sono *praticamente* da preferirsi nel disegno.

gano sulla r due punti A e B abbastanza distanti e si costruisca il triangolo $AP'B$ eguale al triangolo APB. La retta PP' sarà la parallela richiesta.



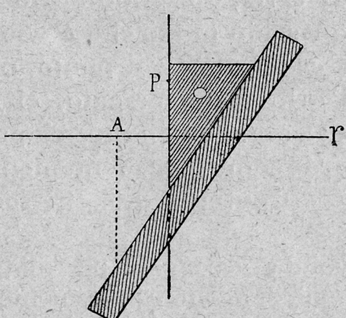
Costruz. 5. — Scelto un segmento AB sulla r e fatto centro successivamente in P e in B, con raggi eguali ad AB, AP si descrivano i due archetti di circolo che si incontrano in P.' La retta PP' è la richiesta.



Es. a mano libera: *Tracciare delle rette parallele in varie posizioni.*

114. Per un dato punto condurre la perpendicolare ad una retta data.

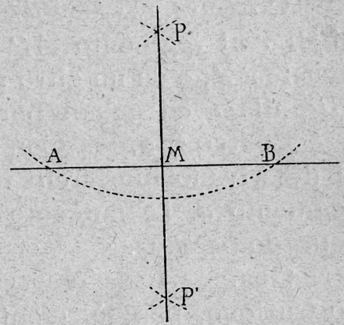
Costruz. 1. — Sia r la retta e sia A il punto. Se A è sulla retta r, basta applicare lungo r un cateto della squadra in modo che il vertice dell'angolo retto cada in A: l'altro cateto allora segna la perpendicolare richiesta, la quale si può poi prolungare o colla riga o colla squadra stessa.



Se invece il punto dato è un punto P fuori della retta e abbastanza vicino alla r, allora, posta la squadra come si è detto precedentemente, la si fa scorrere lungo una riga posta a contatto coll'ipotenusa finchè il cateto passante per A e perpendi-

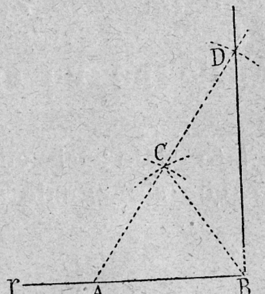
colare alla r passi per P, la retta segnata lungo questo cateto sarà la perpendicolare richiesta.

Costruz. 2. — Se il punto dato è il punto M sulla retta r si prendano i due segmenti MA, MB eguali e da parti opposte di M; indi con centri A e B e con raggio maggiore di AM si descrivano sopra e sotto di AB due archetti incontrantisi nei punti $P\ P'$. La retta PP' sarà la perpendicolare condotta da M alla r.



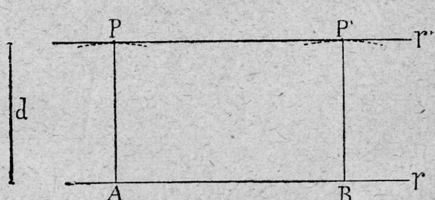
Se invece il punto dato è il punto P fuori di r, si descriva con centro in P un arco che tagli in due punti A e B la retta r; indi con centri A e B e col medesimo raggio PA si descrivano due archetti di circolo al disotto di r, i quali si incontrano in P'. La retta PP' sarà la richiesta.

115. Condurre la perpendicolare ad una retta da un estremo di questa.



Sia r la retta e B un estremo, al di là del quale supponiamo che la retta non si possa prolungare. Si segni un segmento qualsiasi AB e su AB si costruisca il triangolo equilatero ABC. Si prolunghi AC facendo $CD = AC$ si unisca B con D. La retta BD sarà la perpendicolare richiesta.

116. Altra costruzione della parallela ad una retta passante per un dato punto.



Si conduca da P la perpendicolare PA alla r, e da un altro punto B di r si conduca

il segmento BP' perpendicolare ad AB ed eguale a PA. La retta PP' sarà la parallela alla r condotta da P.

117. Retta parallela ad una retta, e ad una data distanza da questa.

Costruz. 1. — Se d è la distanza data, si innalzi in un punto A di r il segmento AP perpendicolare alla r di lunghezza eguale a d; e da un altro punto B si conduca la perpendicolare BP' alla r ed eguale pure a d, e si avrà la retta PP' richiesta.

Costruz. 2. — Con centri nei punti A e B della retta r si descrivano due archi di cerchio il cui raggio sia eguale al segmento d. La tangente comune PP' a questi due archi è la retta domandata.

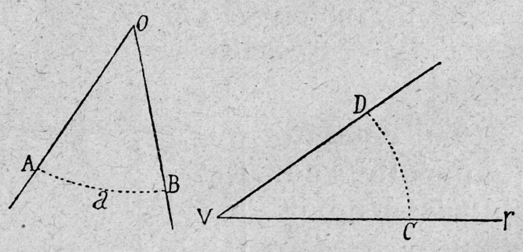
Oss. — È da osservare però che è preferibile la prima costruzione, perchè, mentre in questa i punti P e P' sono determinati e quindi non si ha che da condurre la retta PP', nella seconda, non essendo P e P' determinati, la costruzione della tangente comune ai due archi presenta qualche incertezza.

Es. a mano libera 1. *Tracciare delle rette parallele e delle rette perpendicolari a due a due.*

2. *Eseguire le costruzioni precedenti cogli istrumenti ed a mano libera.*

118. Costruire un angolo eguale ad un angolo dato, essendo dato un lato.

Sia AOB l'angolo dato, è VC il lato dato: si vuol fare un angolo di cui VC sia un lato, e che sia eguale ad

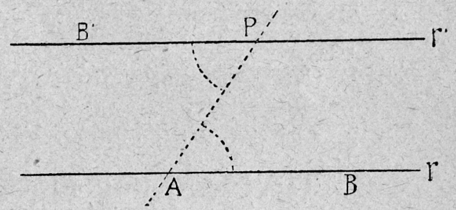


AOB. Con centro in O e raggio OA qualsiasi si descriva l'arco AB; con lo stesso raggio ma con centro in V si de-

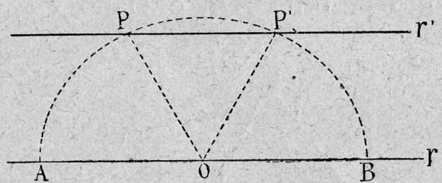
scriva a partire del lato VC l'arco CD, e su questo si segni il punto D tale, che il segmento CD risulti eguale al segmento AB, e si congiunga V con D. L'angolo DVC è il richiesto.

119. Altre costruzioni della parallela passante per un dato punto ad una data retta.

Costr. 1. — Si conduca dal punto dato P la retta PA la quale faccia l'angolo $B'PA$ eguale all'angolo PAB; la retta PB' è la parallela domandata.

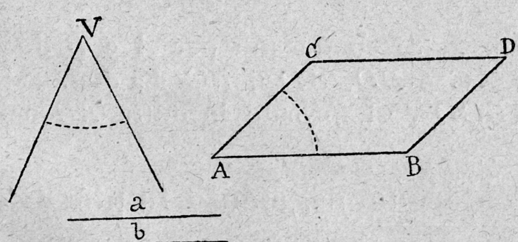


Costruz. 2. — Con centro in un punto O della retta r e con raggio OP si descriva la semicirconferenza APB e si faccia l'angolo BOP' eguale all'angolo AOP. La retta OP' incontra la circonferenza nel punto P', che, congiunto con P, dà la parallela domandata.



120. Costruire il parallelogramma, dati due lati non paralleli e l'angolo da essi compreso.

Costruz. — Sopra un segmento AB eguale ad un lato dato b si costruisca l'angolo CAB eguale all'angolo dato



di vertice V, e si segni il segmento AC eguale all'altro

lato *a*. Si conducano poi per *B* e *C* le parallele rispettivamente alle rette *AC* e *AB*; il parallelogramma *ABCD* è il richiesto.

Es. 1. *Costruire un triangolo rettangolo dati i due cateti.*

» 2. *Castruire un rettangolo, dati i lati non paralleli.*

» 3. *Costruire un rettangolo, dati un lato e una diagonale.*

» 4. *Costruire un quadrato, dato il lato.*

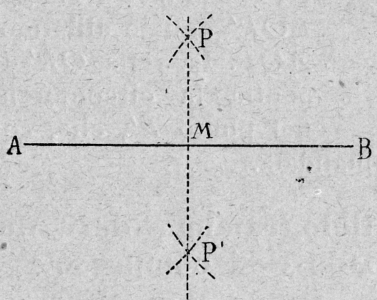
» 5. *Costruire un triangolo, dati due lati e l'angolo da essi compreso.*

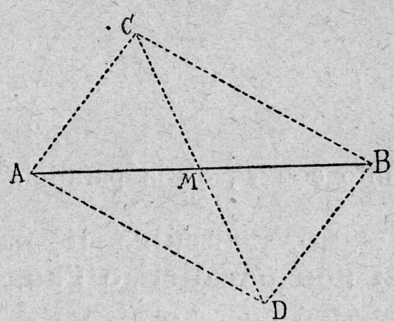
Es. 6. *Costruire il parallelogramma,, dati due lati non paralleli ed una diagonale.*

Es. 7. *Costruire un rombo, dati un angolo ed un lato.*

121. Dividere per metà un segmento dato.

Costruz. 1. — Sia *AB* il segmento dato. Con centri *A* e *B* e con raggio eguale o maggiore di *AB*, si descrivano due archetti di circolo sopra e sotto la retta *AB*, e siano *PP'* i





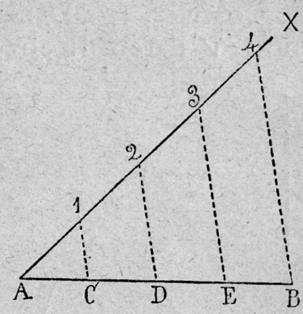
loro punti d' incontro. La retta *PP'* incontra *AB* nel punto di mezzo *M*.

Costruz. 2. — Si conducano per *A* e *B* due coppie di rette parallele *AC* e *BD*, *AD* e *BC*. La diagonale del parallelogramma *ABCD* così formato incontra *AB* nel suo punto di mezzo *M*.

122. Dividere un segmento in più di due parti eguali.

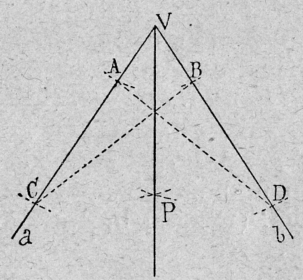
Vogliasi, ad es., dividere *AB* in 4 parti eguali. Si con-

duca per A una retta AX e su di essa si segnino quattro segmenti A 1, 1 2, 2 3, 3 4 eguali ad un segmento scelto ad arbitrio. Si congiunga il punto 4 con B e dai punti 3, 2, 1 si conducano la parallele alla $B4$ sino ad incontrare in E, D, C il segmento dato AB. Sarà AB così diviso in quattro parti eguali.



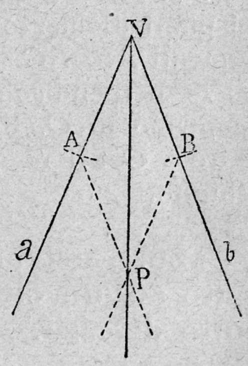
123. Costruire la bissettrice di un angolo dato.

Costruz. 1. — Sui lati ab dell'angolo dato (convesso) si prendano due punti A e B equidistanti dal vertice V; e con centri A e B con raggio maggiore di AB si traccino due archetti di circoli, che si incontrano in un punto P. La retta VP è la bissettrice richiesta.



Costruz. 2. — Oppure, oltre ai punti A e B si prendano i punti C e D pure ad eguale distanza da V; i segmenti AD, BC si incontrano in un punto che unito con V dà la bissettrice dell' angolo domandato.

Costruz. 3. — Ancora, dai punti A e B si conducano le parallele ai lati a e b dell'angolo: esse si incontrano in un punto P. La retta VP è la retta domandata.

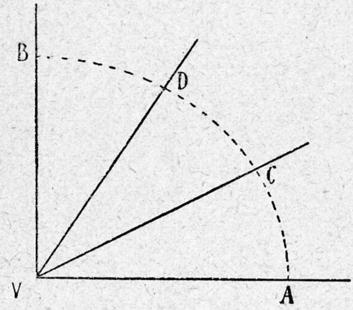


Oss. — Se si ha una riga a due orli paralleli si può costruire il rombo $VAPB$ applicando prima uno degli orli lungo la retta a, poi lungo la retta b, e tracciando le due rette AP, BP.

Però le due prime costruzioni sono più sicure, e sono quindi a questa preferibili.

124. Dividere un angolo retto in 3 parti eguali.

Costruz. — Dato l'angolo retto BVA, si descriva con centro V l'arco di circolo AB e si costruisca il segmento BC eguale a BV; l'angolo CVA è la terza parte dell'angolo retto; prendendo poi $CD = AC$ e congiungendo V con D si avrà pure che $B\hat{V}D$, $D\hat{V}C$ sono la terza parte dell'angolo retto AVB.



Oss. In generale un angolo non retto non può essere diviso in tre parti eguali colle riga e col compasso.

Eserc. 1. *Risolvere i problemi precedenti con gli strumenti e a mano libera.*

2. *Costruire la bissettrice dell'angolo opposto alla base di un triangolo isoscele.*

3. *Costruire le bissettrici dei tre angoli di un triangolo.* (Esse si incontrano in uno stesso punto).

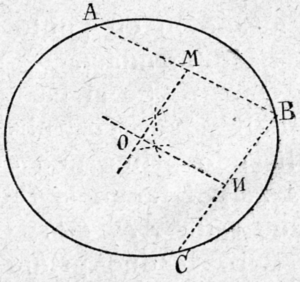
4. *Costruire le perpendicolari passanti pei punti di mezzo dei lati di un triangolo.* (Esse si incontrano in uno stesso punto).

5. *Costruire le mediane di un triangolo.* (Esse si incontrano in uno stesso punto).

6. *Eseguire le costruzioni* 3, 4, 5 *nel medesimo triangolo.*

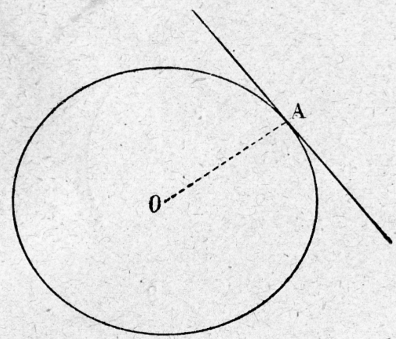
125. Costruire il circolo che passa per tre punti dati non situati sulla stessa retta.

Siano ABC i tre punti dati. Pei punti di mezzo M ed N dei segmenti AB, BC si innalzino ad essi le perpendicolari; queste si incontrino in O. Il punto O è il centro e OA il raggio del circolo richiesto.

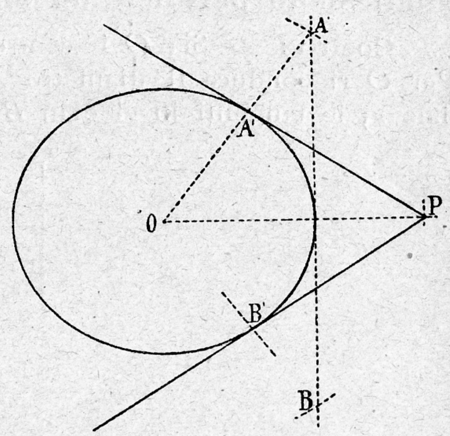


126. Costruire la tangente ad un circolo, in un punto di esso.

Dato un punto A della circonferenza di centro O si conduca il raggio OA indi la perpendicolare ad OA; questa perpendicolare sarà la tangente domandata.



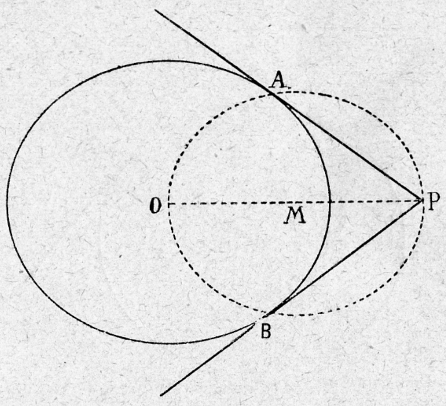
127. Costruire le tangenti ad un circolo, le quali passino per un punto esterno ad esso.



Costruz. 1. — Sia O il centro del circolo dato, e P il punto esterno ad esso. Si tiri il segmento OP, il quale taglia la circonferenza in un punto. In questo punto si conduca la perpendicolare ad OP e si descriva l'arco di circolo di centro O e di raggio OP, che taglia la retta perpendicolare nei punti A e B. Si congiungano A e B con O fino ad incontrare il circolo in A', B' rispettivamente. Le rette PA', PB' sono le tangenti richieste.

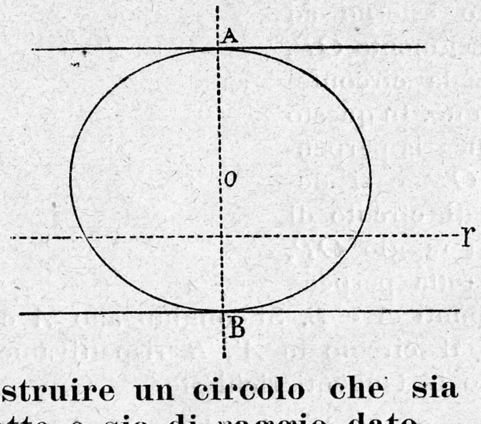
Costruz. 2. — Si descriva la circonferenza che ha per diametro OP (dividendo perciò OP per metà in M): essa incontra il circolo dato nei punti A, B. Le rette PA, PB, sono le tangenti domandate.

Oss. — La retta OP è la bissettrice dell'angolo formato dalle due tangenti.



128. Costruire le tangenti ad un circolo, le quali siano parallele ad una retta data.

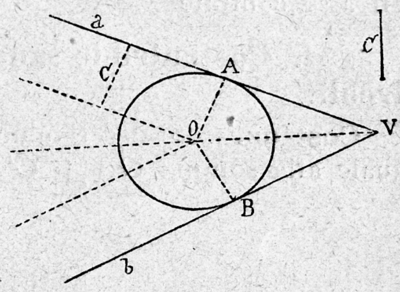
Costruz. — Sia O il centro del circolo, ed r sia la retta. Per O ri conduca il diametro AB perpendicolare alla retta data r; le tangenti in A e in B sono le tangenti richieste.



129. Costruire un circolo che sia tangente a due date rette e sia di raggio dato.

Costruz. — Sia c il raggio dato e sia V il punto d'incontro delle due rette date a e b. Conducasi da V la bissettrice dell'angolo $(a\, b)$ e la parallela alla retta a che abbia dalla a

la distanza eguale al segmento dato *c*. Il punto d'incontro *O* di questa parallela colla bisset- trice è il centro, e la distauza *OA* della retta *a* è il raggio del circolo domandato.



Se le rette *a* e *b* sono parallele e il raggio *c* è eguale alla metà della loro distanza, la soluzione è evidente.

Eserc. 1. *Dato nn arco di circolo, determinare il suo centro.*

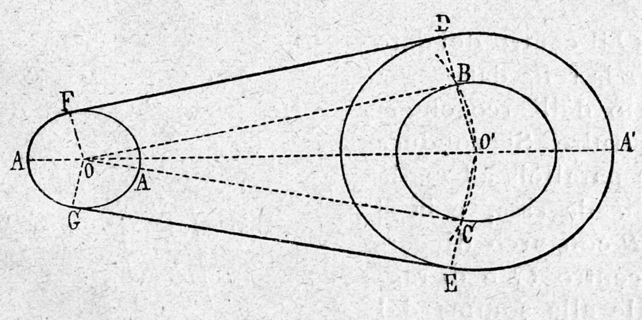
2. *Descrivere il circolo passante pei vertici di un dato triangolo* (circolo circoscritto al triangolo).

3. *Descrivere il circolo tangente ai lati di un triangolo* (circolo inscritto al triangolo).

4. *Descrivere un circolo che passi per un punto della bissettrice di un angolo dato e sia tangente ai lati dell'angolo.*

130. Costruire le tangenti esterne comuni a due circoli.

Costr. Siano *O*, *O'* i due centri dei circoli di raggi *OA* ed *OA'*. Si costruisca il circolo di centro *O* e di raggio eguale alla differenza; *O'A'* — *OA* dei due raggi e da *O* si conducano ad esso le tangenti *OB*, *OC*. Si conducano poi i raggi *OF O'D* perpendicolari alla retta *OB* e i raggi *OG*

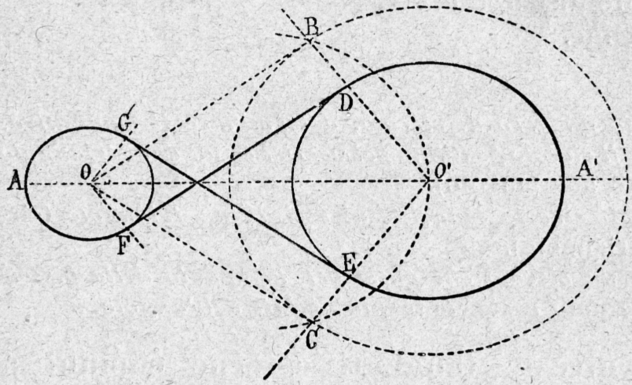


O'E perpendicolari alla *OC* e della stessa parte dell'asse centrale *OO'*. Le rette *DF*, *GE* sono le tangenti richieste.

Oss. — Se si prolungano, esse si incontrano in un punto dell' asse centrale.

131. Costruire le tangenti interne comuni a due circoli.

Costruz. — Si descriva un circolo di centro O' e di raggio eguale alla somma $OA + O'A'$ dei raggi, e si conducano ad esso da O le tangenti OB ed OC. Inoltre si conducano da O i raggi OG, OF perpendicolari ad OC e OB, dalla parte opposta dell'asse centrale OO'. Le

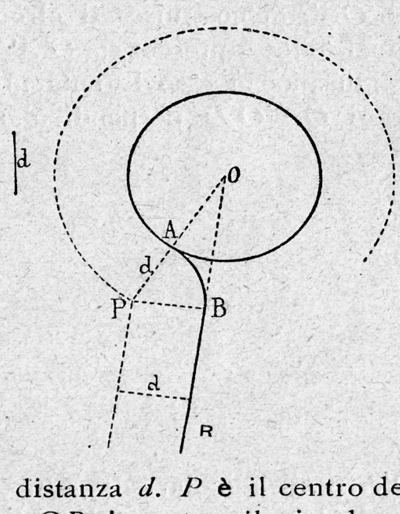


rette DF, EG sono le tangenti richieste.

Oss. Esse pure incontransi in un punto dell'asse centrale.

132. Costruire un arco di raggio dato. tangente ad una retta e ad un circolo.

Sia O il centro del dato circolo, r la retta data e sia d il raggio dell'arco che si deve costruire. Si conduca una retta parallela ad r alla distanza d da essa, e la si tagli in P con arco di cerchio di centro O e di raggio eguale alla somma del



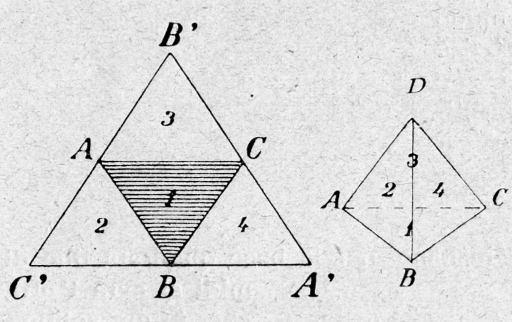
raggio del circolo dato e della distanza d. P è il centro dell'arco cercato. Il punto A dove OP incontra il circolo di

centro O e il punto B, piede della perpendicolare condotta da P alla r sono i punti di contatto dell'arco.

Oss. — L'arco AB si chiama l'*arco di raccordamento* fra la retta r e il circolo di centro O. Il disegnatore deve procurare che non si vedano i punti ovve avviene il raccordamento in modo che l'arco di circolo di centro O, l'arco tangente e la retta formino una linea di tratto uniforme specialmente qnando si passa il disegno coll' inchiostro.

Costruzioni dei poliedri con cartoncino

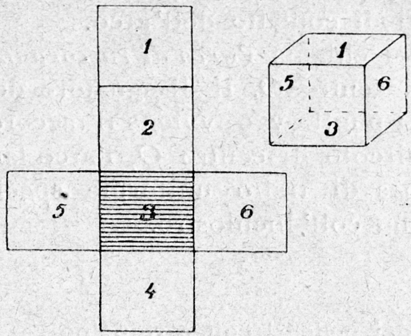
Si ritagli da un cartoncino un triangolo equilatero $A'B'C'$, indi con una listerella di carta, o col compasso si dimezzino i lati $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ nei punti A,B,C. Con un temperino, ma senza tagliare, si solchi alcun poco il cartoncino lungo le rette AB, BC, CA, indi si sollevino e si riuniscano i tre triangoli ABC', BCA', CAB', in modo che i tre punti $A'B'C'$ si riuni-



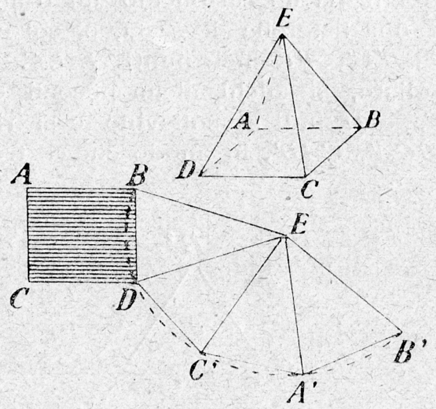
scano in uno solo. Se si avrà a disposizione un poco di carta gommata questi tre punti $A'B'C'$ potranno essere uniti in modo da formare un solido. Esso è il **tetraedro regolare**; e la figura quì accanto ne è lo **sviluppo** sul foglio del disegno. Esso è un solido racchiuso da 4 triangoli equilateri tutti fra loro eguali.

Si ritagli un pezzo di cartoncino che abbia la forma di una croce composta di 6 quadrati tutti eguali fra loro e disposti come nella figura. Dopo di aver solcato i tratti comuni a due quadrati

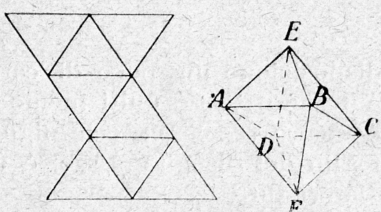
con un temperino, si pieghino, rizzandoli verticalmente, i quadrati 4 5 e 6 e il rettangolo 1 e 2, e infine si pieghi ancora il quadrato 1. Si avrà così un solido, propriamente il **cubo** o l' **esaedro regolare.** La figura a sinistra ne è lo **sviluppo.** Un dado ha la forma del cubo.



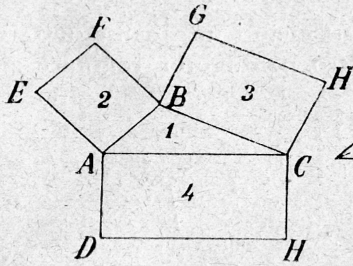
Similmente, ritagliando un pezzetto di cartoncino, che abbia la forma di un quadrato, e segnati i quattro triangoli equilateri eguali e consecutivi a quello del quadrato, indi ripiegando i quattro triangoli in modo che i vertici *C'A'B'* coincidano in *C*, *A* e *B*, si avrà una **piramide regolare a base quadrata.**

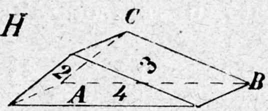


Riunendo insieme per la base quadrata due di queste piramidi si avrà l' **ottaedro regolare** che è un solido racchiuso da otto triangoli equilateri tutti fra loro eguali. Questo ottaedro si può anche ottenere ritagliando un cartoncino che abbia la forma di otto triangoli equilateri ed eguali, disposti come nello sviluppo quì a sinistra, e riunendo convenientemente questi triangoli.



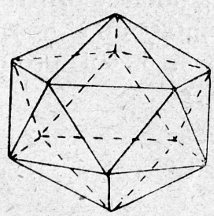
Si ritagli un cartoncino che abbia la forma di un triangolo qualsiasi ABC, sui lati del quale si siano costruiti dei rettangoli,

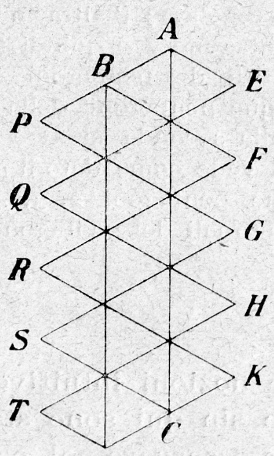




tutti di eguale altezza $AD \equiv CK \equiv AE \equiv BF \equiv BG \equiv CH$. Rialzando poi verticalmente i tre rettangoli 2 3 e 4, in modo che AE coincida con AD, BF con BG ecc. si avrà un **prisma retto a base triangolare.**

Si ritagli un cartoncino che abbia la forma della figura qui accanto, composta di 20 triangoli equilateri, tutti eguali fra loro disposti così, 10 in un parallelogramma, 5 a sinistra e altri 5 a destra; solcando leggermente lungo i tratti che appartengono al

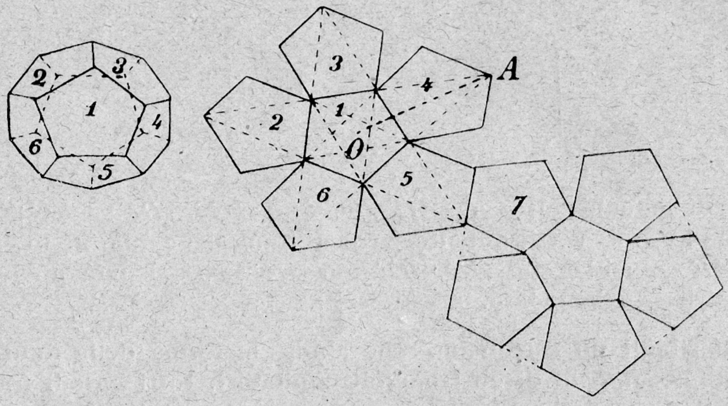




parallelogramma, e piegando poi convenientemente i 10 triangoli contenuti nel parallelogramma in modo che gli orli AB, CD

combacino, e i 5 triangoli a destra in modo che i vertici *EFGH* e *K* coincidano, e così gli altri 5 triangoli a sinistra in modo che i punti *PQRS* e *T* coincidano, si avrà l'**icosaedro regolare.**

Costruiamo sopra un cartoncino un pentagono regolare 1; sopra un lato di esso un altro pentagono regolare 2 eguale al



primo, e così successivamente sugli altri lati i pentagoni 3, 4, 5, 6. Ciò facendo noi avremo costruita la prima metà dello sviluppo del **dodecaedro regolare**; l' altra metà si avrà costruendo di fianco a questa il pentagono 7 e quindi tutti gli altri 8, 9, 10, 11 e 12. Riunendo gli orli dei pentagoni 2, 3, 4, 5, 6; e così facendo anche dei cinque pentagoni della seconda metà e ribaltando la prima metà sulla seconda si avrà il dodecaedro regolare stesso. Dalla figura si vede come dato il pentagono si possono disegnare gli altri cinque pentagoni 2, 3, 4, 5, 6, coi prolungamenti dei lati e delle diagonali del pentagono 1.

La retta, il piano e lo spazio illimitati.

133. Le nozioni intuitive e le costruzioni geometriche svolte sin qui sono state tratte da oggetti che noi possiamo osservare nel campo esteriore, che è pur sempre *limitato,* anche se noi possiamo estendere queste osservazioni col mezzo del cannocchiale, col mezzo del microscopio o di altri simili istrumenti. Ed anche

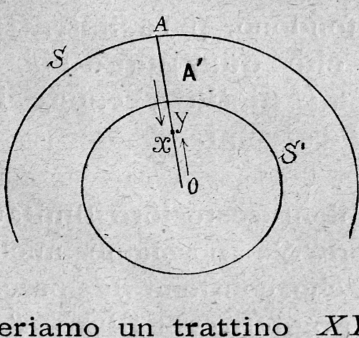
quando abbiamo notata qualche proprietà delle figure, come ad es. quella che, a partire da un punto *qualunque* della retta, possiamo considerare un segmento AX eguale ad un segmento dato, abbiamo però subito soggiunto che ciò vale limitatamente al campo delle nostre osservazioni.

L'imagine che ci siamo dunque formata della retta è quella della retta limitata, per quanto indeterminati siano i suoi estremi.

E così per il piano e per lo spazio.

Abbiamo poi veduto come si possa dividere un segmento dato in un numero n di parti eguali, mediante la costruzione di rette parallele (n. 122); ma dalla figura stessa possiamo rilevare che se gli estremi del segmento da dividersi sono vicinissimi, allora le parallele nella pratica si confondono, in guisa che si confondono anche i punti di divisione cogli estremi del segmento dato. Per le operazioni pratiche eseguite coi punti di tale segmento è indifferente prendere l'uno o l'altro estremo, o il segmento stesso come punto.

Ma nel disegno noi rappresentiamo di solito degli oggetti con figure molto più piccole (un esempio di ciò lo abbiamo nella fotografia che rappresenta degli oggetti con figure piane più piccole). Così una sfera S di raggio OA, ad es. di 100 metri, la possiamo rappresentare con una sfera S' di raggio OA' di 10 metri, in modo che ogni parte di ciascun raggio della S venga rappresentata in S' da una decima parte di esso, come OA' è un decimo di OA. Se consideriamo un trattino XY del segmento OA, esso ci



appare (o è effettivamente) indivisibile in parti, e se supponiamo che esso stia n volte in OA, si avrà $XY = (OA)\frac{1}{n}$.

Ma se noi vogliamo rappresentare la sfera S con la sfera S', affinchè la rappresentazione sia completa nel modo indicato, bisogna pur ammettere che esista la n^ma^ parte di OA' come esiste la n^ma^ parte di OA perchè lo studio geometrico della sfera S possa farsi senz'altro sulla sfera S'. D'altronde la n^ma^ parte di OA' è la decima parte di XY, quindi essa non è praticamente determinabile ed ha soltanto un'*esistenza ideale*. E poichè OA' è parte di OA, così la parte n^ma^ di OA' è pur parte di OA, è un sottomultiplo di OA, secondo il numero $10.n$. E il ragionamento precedente valendo per ogni parte di OA, come vale per XY, si conchiude che per la stessa ragione dovremo ammettere in OA l'esistenza di una parte eguale ad un sottomultiplo di OA secondo il numero $100.n$, cioè secondo il numero $10^2.n$; quindi analogamente si dovrà ammettere in OA anche la parte aliquota secondo il numero $10^3.n$, poi quella secondo il numero $10^4.n$; . . . . e così di seguito.

Egli è perciò che, se anche praticamente non possiamo sempre segnare in un segmento dato un punto distinto dagli estremi, quando come nel caso del segmento XY, gli estremi si confondono, pure **astrattamente possiamo ammettere che qualunque sia il segmento XY con gli estremi distinti, esiste in esso un punto distinto dagli estremi.**

In modo analogo, se l'ambiente esteriore limitato lo rappresentiamo con la sfera S', possiamo anche rappresentarlo in una sfera S che contiene la precedente. E come vediamo che un oggetto rettilineo $A'B'$

della sfera S' è contenuto in un altro oggetto rettilineo AB della S, così noi siamo indotti ad ammettere che anche il maggior segmento rettilineo che possiamo osservare, o di cui conosciamo l'esistenza, sia alla sua volta contenuto in un altro segmento cogli estremi distinti da quelli del primo. In altre parole **possiamo ammettere che ogni segmento AB appartenga ad un altro segmento CD con gli estremi distinti da A e da B estendendo a CD le proposizioni enunciate per AB.**

Per quanto la nostra mente non possa arrestarsi ai limiti estremi della nostra osservazione anche nello spazio fisico, pure la proposizione colla quale si asserisce che *ogni segmento appartenga ad un altro con gli estremi distinti da quelli del primo* non è tratta tutta quanta dall' osservazione pratica: essa ha, per così dire, una esistenza ideale, come quella che asserisce che in ogni segmento vi è un punto distinto dagli estremi.

Per tutte queste ragioni stabiliremo che:

134. Dati più segmenti rettilinei tali che ciascuno appartenga ad un altro di essi, avente estremi distinti da quelli del primo, e due segmenti qualunque appartengano essi pure ad un altro dei segmenti dati; la figura formata da tutti questi segmenti chiamasi ancora **linea retta.**

Segue da ciò:

La linea retta è illimitata in ognuna delle sue direzioni. E infatti se essa fosse limitata da due punti A e B essa sarebbe compresa in un altro segmento $A'B'$ cogli estremi distinti da A e da B, e non sarebbe tutta la retta. E se fosse limitata da un solo punto A si potrebbe prendere su di essa un segmento AB e

questo esistendo in un segmento $A'B'$ cogli estremi distinti da A e da B, non potrebbe esser limitato dal punto A. La retta è dunque illimitata secondo entrambe le sue direzioni.

Se consideriamo la retta come non data, ma in formazione o in costruzione, data essendo la retta limitata, allora la proprietà che la retta è illimitata si esprime dicendo che: **La retta può essere prolungata indefinitamente in ciascuna delle sue direzioni.**

135. Se poi si considerano tutte le rette del piano passanti per un punto come illimitate si ha il **piano illimitato**, il quale chiamasi ancora e semplicemente **piano.**

136. E se si considerano tutte le rette dello spazio passanti per un punto come illimitato, si ha lo **spazio illimitato**, il quale pure chiamasi semplicemente **spazio.**